POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

PL ISSN 0035-9
Indeks 363

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS QUARTERLY

dawniej
ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXVII — ZESZYT 1-2

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 1991

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

(ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS QUARTERLY)

TOM XXXVII — ZESZYT 1-2

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 1991

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący
prof. dr. ADAM SMOLIŃSKI
członek rzeczywisty PAN

Członkowie
prof. dr hab. DANIEL JÓZEF BEM, prof. dr hab. inż. MICHAŁ BIAŁKO — czł. koresp. PAN, prof. dr hab. inż. STEFAN HAHN — czł. koresp. PAN, prof. dr inż. ANDRZEJ HAŁAS, prof. dr inż. ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. inż. BOHDAN MROZIEWICZ, prof. dr inż. JERZY OSIOWSKI, prof. dr hab. inż. STEFAN WĘGRZYN — czł. rzecz. PAN, prof dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI, prof. dr inż. ANDRZEJ ZIELIŃSKI, prof. dr inż. MARIAN ZIENTALSKI

REDAKCJA
Redaktor naczelny
prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI

Zastępca Redaktora Naczelnego
doc. dr inż. KRYSTYN PLEWKO

Sekretarz Odpowiedzialny
mgr KRYSTYNA LELAKOWSKA

ADRES REDAKCJI
00-665 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19 Politechnika,
Instytut Telekomunikacji, Gmach im. prof. JANUSZA GROSZKOWSKIEGO

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 14—16
tel. 628 89 81 210 07-737

Telefony domowe: Redaktora Naczelnego: 12 17 65
Zast. Red. Naczelnego: 26 83 41
Sekretarz Odpowiedzialnego: 25 29 18

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
Warszawa, ul. Miodowa 10

Ark. wyd. 27,00	Podpisano do druku w grudniu 1991 r.
Ark. druk. 21,75	Druk ukończono w styczniu 1992 r.
Papier offsetowy kl. III 70 g. B-1	

Skład: „PAMACOMP". Druk i oprawa: Drukarnia — Warszawa, ul. Hajoty 50.

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, Z. 1–2, SS. 3–11

519.68
681.3.06

Polioptymalizacja sprzętowej struktury sieci komputerowej

JERZY BALICKI

Zakład Informatyki AMW, Gdynia

Otrzymano 1990.08.20

Autoryzowano do druku 1990.12.18

W artykule sformułowano problem wyznaczania sprzętowej struktury sieci komputerowej w postaci zadania optymalizacji wektorowej. Do oceny wariantów projektu zastosowano dwa kryteria: kryterium ekonomiczne oraz kryterium związane z jakością funkcjonowania sieci. Zaproponowano suboptymalną metodę wyznaczania rozwiązań optymalnych w sensie Pareto oraz rozwiązań kompromisowych.

1. WSTĘP

Praca dotyczy optymalizacji łącznego przydziału typów komputerów oraz typów kanałów w procesie projektowania globalnej sieci komputerowej (w skrócie SK). Niewłaściwy dobór typów komputerów lub typów kanałów może spowodować nieuzasadnione zwiększenie kosztów budowy sieci lub wydłużyć czas przetwarzania informacji w porównaniu z optymalnymi rozwiązaniami.

Pojęcie sprzętowej struktury SK jest definiowane różnorodnie w zależności od celów modelowania oraz stosowanego języka formalizacji w teorii SK [9,10]. W pracy, pod pojęciem sprzętowej struktury SK rozumie się łączny przydział typów komputerów i typów kanałów.

Jedną z pierwszych metod projektowania sprzętowej struktury SK była metoda Changa [4]. W powyższej metodzie nie optymalizuje się wyznaczonych rozwiązań dopuszczalnych. Ponadto w [4] rozpatruje się SK o topologii drzewa. Na podstawie zmodyfikowanego modelu Changa w pracy [3] zaproponowano optymalizację struktury sprzętowej i programowej SK. Parametryczną metodę struktur złożonych systemów w tym również SK przedstawili Gonzales i Jordan [6]. Ineresujący model funkcjonowania SK zaproponował Janbych [7].

W pracy na podstawie zmodyfikowanego modelu Janbycha sformułowano zagadnienie wyznaczania sprzętowej struktury SK w postaci zadania optymalizacji wektorowej. Zaproponowano metodę rozwiązania powyższego problemu. Zastoso-

wano oznaczenia i definicje pojęć podstawowych w zakresie polioptymalizacji z dostępnych prac Ameljańczyka [1,2].

2. MODEL FUNKCJONOWANIA SK

Na pewnym obszarze geograficznym rozaważa się zbiór numerów usytuowań terminali $A = \{1,..., n,..., N\}$. Terminal rejestruje i prezentuje informację oraz organizuje wymianę danych z siecią poprzez węzeł w sposób lokalny lub zdalny. W dowolnym usytuowaniu terminala może się znajdować węzeł komunikacyjny lub kompleks obliczeniowy, który zawiera komputer obliczeniowy i węzeł. Użytkownik wprowadza do sieci za pomocą terminala pytania do aktualnie eksploatowanych systemów informatycznych i uzyskuje właściwą informację. Możliwe jest komunikowanie z innymi użytkownikami za pomocą transferu zbiorów informacyjnych. Pytanie proste wymaga dostępu do zasobów jednego komputera. Pytanie złożone wymaga dodatkowo dostępów do zasobów innych komputerów. Komputery obliczeniowe mogą być różnych typów. Węzły i terminale komunikują się poprzez dzierżawione z resortu łączności kanały telekomunikacyjne, które również mogą być różnych typów.

Przyjmuje się, że dany jest zbiór koniecznych usytuowań kompleksów obliczeniowych $Y_0 \subset A$. Ponadto komputery obliczeniowe mogą być projektowane tylko w punktach ze zbioru B, przy czym $B \subset A$ oraz $Y_0 \subset B$. Zakładając, że kanały przesyłają dane w obu kierunkach, można dla dowolnej pary terminali (i, j) wyznaczyć indeks pojedynczy l za pomocą poniższej zależności:

$$l = \begin{cases} i - j & \text{dla } j = 1 \\ i - j + \sum_{k=1}^{j-1} \left(N - k\right) & \text{dla } j = \overline{2, N-1}, \end{cases}$$

gdzie $N \geqslant 2$ oraz $i > j$.

Niech $\mathscr{F}_{1i}$ oznacza średnią intensywność prostych pytań z i-tego terminala, a $\mathscr{F}_{2i}$ – średnią intensywność odpowiedzi na proste pytania przesłane do i-tego terminala. Łączna intensywność przesyłania danych związanych z pytaniami prostymi między i-tym terminalem, a węzłem wynosi $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}_{1i} + \mathscr{F}_{2i}$. Postawową jednostką miary intensywności jest $\left[\frac{\text{bit}}{\text{s}}\right]$. Niech $\mathscr{F}_{1ij}$ oznacza średnią intensywność ruchu związanego z pytaniami złożonymi między i-tym terminalem, a j-tym terminalem, a $\mathscr{F}_{2ij}$ oznacza średnią intensywność odpowiedzi na złożone pytania zadawane z i-tego terminala, do j-tego terminala. Łączna intensywność przesyłania danych związanych z pytaniami złożonymi, zadawanymi od i-tego terminala do j-tego terminala wynosi $\mathscr{F}_{ij} = \mathscr{F}_{1ij} + \mathscr{F}_{2ij}$. Średnią intensywność wiadomości informacyjnych (poczta elektroniczna) od i-tego terminala do j-tego terminala oznaczono przez γ_{ij}. Natomiast średnią długość wiadomości (pytanie proste lub złożone, wiadomość informacyjna) oznaczono przez $1/\mu$ [bit].

Przepustowość kanału należy do zbioru możliwych wartości przepustowości $\{C_1,..., C_k,..., C_K\}$, w którym przepustowości uporządkowane są w sposób rosnący. Analogicznie, komputery obliczeniowe mogą charakteryzować się jedną z następujących przepustowości $\{\kappa_1,...,\kappa_j,...,\kappa_J\}$.

Intensywność przepływu danych w kanale łączącym i-ty terminal z węzłem można wyznaczyć następująco:

$$\Lambda_i = \mathscr{F} + \sum_{\substack{n=1\\n=i}}^{N} (\gamma_{in} + \gamma_{ni}) + \sum_{\substack{n=1\\n=i}}^{N} \mathscr{F}_{in},$$

Intensywność zapytań kierowanych do komputera obliczeniowego w i-tym miejscu obejmuje proste pytania oraz ruch generowany przez pytania złożone i można ją wyznaczyć jak niżej:

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} \mathscr{F}_{1n}\, x_{lk}^{\,e} (1 - x_{nj}^{\,\pi}) + \sum_{\substack{n=1\\n=i}}^{N} \mathscr{F}_{1ni},$$

gdzie

l odpowiada parze (n, i) lub (i, n),

$$x_{lk}^{\,e} = \begin{cases} 1 \text{ gdy } l\text{-tą parę stacji łączy kanał o przepustowości } C_k \\ 0 \text{ w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$x_{nj}^{\,\pi} = \begin{cases} 1 \text{ gdy do } n\text{-tej stacji przydzielono komputer o przepustowości } \kappa_j, \\ 0 \text{ w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Intensywność przepływu danych f_l w kanałach łączących węzły można wyznaczyć np. za pomocą procedury M2 141 z pracy [3], przy czym wcześniej należy ustalić $x_{lk}^{\,e}$ dla $l = \overline{1,l}$, $k = \overline{1,k}$.

Intensywność wprowadzanych wiadomości z terminala do węzła można wyznaczyć następująco [ ]:

$$\overline{\mathscr{F}}_i = \mathscr{F}_{i1} + \sum_{\substack{n=1\\n=i}}^{N} (\mathscr{F}_{1in} + \gamma_{in}).$$

Koszt połączenia terminali i węzłów oraz nabycia komputerów obliczeniowych można wyznaczyć jak niżej:

$$F_1(x) = \frac{\beta\,(\beta + 1)^{\tau}\tau}{(\beta + 1)\,\tau - 1} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} g_j x_{ij}^{\,\pi} + \sum_{l=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} q_k{}^{0} x_{lk}^{\,e} \right) + 12 \sum_{l=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} (g_k{}^{m} + q_k d_l^{\alpha}) x_{lk}^{\,e},$$

gdzie

$x = (x_{11}{}^{e},...,x_{lk}{}^{e},...,x_{LK}{}^{e},...,x_{11}{}^{\pi},...,x_{ij}{}^{\pi},...,x_{NJ}{}^{\pi})$ – rozwiązanie opisujące sprzętową strukturę SK,

β – stopa dyskonta (zwykle $\beta = 0{,}1$),

τ — okres eksploatacji sieci,
g_i — koszt komputera o przepustowości κ_j,
q_K^0 — koszt podłączenia kanału o przepustowości C_k,
q_k^m — miesięczny abonament dzierżawy kanału o przepustowości C_k,
q_k — aproksymowany na podstawie taryfy telekomunikacyjnej współczynnik liniowy funkcji wykładniczej dzierżawy kanału o przepustowości C_k,
α — aproksymowany na podstawie aktualnej taryfy telekomunikacyjnej wykładnik funkcji wykładniczej dzierżawy kanałów,
$F_1(x)$ — suma rocznych kosztów eksploatacji kanałów oraz kosztów inwestycyjnych związanych z zakupem komputerów obliczeniowych. Koszt inwestycyjny przeliczono na roczne nakłady za pomocą tzw. współczynnika amortyzacji [5].

Średnie opóźnienie wiadomości w sieci można przedstawić następująco:

$$F_2(x) = T_1(x) + T_2(x) + T_3(x),$$

gdzie
$T_1(x)$ — średni czas wprowadzania wiadomości z tereminali do węzłów,
$T_2(x)$ — średni czas przesyłania wiadomości w sieci,
$T_3(x)$ — średni czas przetwarzania wiadomości w sieci.

Średni czas wprowadzania wiadomości z terminali do węzłów można przedstawić jak niżej:

$$T_1(x) = \frac{1}{\gamma\mu} \sum_{n=1}^{N} \bar{\mathcal{F}}_n \left(\sum_{j=1}^{J} (1 - x_{nj}^{\pi}) \right) \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \frac{x_{ik}^{e}}{C_K},$$

gdzie
l odpowiada parze węzłów (n, i) lub (i, n),
$\gamma = \sum_{n=1}^{N} \bar{\mathcal{F}}_n$ — globalna intensywność wprowadzanych wiadomości do sieci.

Średni czas przesyłania wiadomości w sieci dla modelu ruchu Kleinrocka [8] można oszacować następująco:

$$T_2(x) = T_0 + \sum_{l=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{\mu C_k} + \frac{f_l C_k}{\mu'(\mu' C_\varkappa - f_i} + T_0 + \sum_{k=1}^{K} \frac{d_l}{v_k} x_{lk}^{e} \right) \frac{f_l}{\gamma} x_{lk}^{e},$$

gdzie
T_0 — dany czas przetwarzania wiadomości w węźle,
μ' — średnia długość wiadomości oraz danych sterujących,
d_l — odległość między l-tą parą węzłów,
v_k — szybkość propagacji sygnału w kanale typu k,
Zakładając, że programy obsługujące wiadomości przetwarzane są w sposób cykliczny otrzymując równe odcinki czasowe, średni czas przetwarzania wiadomości można oszacować jak niżej [8]:

$$T_3(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} \frac{\sigma_i t_j}{\sigma \left(1 - \sum_{l=1}^{J} \sigma_i t_j x_{ij}^{\pi} \right)} x_{ij}^{\pi},$$

gdzie

$\sigma = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$ – łączna intensywność wprowadzanych pytań do komputerów,

t_j – dany średni czas przetwarzania programu obsługującego wiadomość w nieobciążonym komputerze o przepustowości κ_j.

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU PROJEKTOWEGO

Do oceny projektowanej struktury sprzętowej SK przyjęto dwa kryteria. Pierwszym kryterium jest roczny koszt dzierżawy kanałów, zwiększony o odpowiednią część kosztów zakupu komputerów obliczeniowych. Drugim kryterium jest średni czas reakcji systemu na wprowadzoną wiadomość. Specyfika modelowanej sytuacji decyzyjnej polega na dążeniu do wyznaczania rozwiązań o najmniejszym koszcie oraz najkrótszym czasie reakcji systemu. Ponieważ nie preferuje się żadnego z kryteriów pożądane są rozwiązania dominujące w sensie relacji Pareto. Niestety, jak pokazała praktyka obliczeniowa w rozważanym problemie, takie rozwiązania na ogół nie istnieją. Bardziej racjonalne wydaje się postawienie zagadnienia polioptymalizacji, w którym poszukuje się rozwiązań niezdominowanych w sensie relacji Pareto. Powyższe podejście umożliwia dokonanie wyboru ze zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto – rozwiązań kompromisowych.

Zadanie wyznaczania rozwiązań niezdominowanych w sensie relacji Pareto można przedstawić w postaci uporządkowanej trójki (X, F, R), gdzie:

1) x – zbiór rozwiązań dopuszczalnych

$$x = \{x \in \{0,1\}^M \mid x = (x_1,\ldots,x_m,\ldots,x_M),\ M = LK + NJ,$$
$$x = (x_{11}{}^{e},\ldots,x_{lk}{}^{e},\ldots,x_{LK}{}^{e},\ldots,x_{11}{}^{\pi},\ldots,x_{nj}{}^{\pi},\ldots,x_{NJ}{}^{\pi}),$$

a) ograniczenie dopuszczalnych nakładów

$$F_1(x) \leqslant K_{gr},$$

b) ograniczenie maksymalnego czasu reakcji systemu

$$F_2(x) \leqslant T_{gr},$$

c) ograniczenie przepływu danych w kanale

$$\sum_{k=1}^{K} C_k x_{lk}{}^{e} \geqslant \frac{f_l}{\mu} \qquad \text{dla } l = \overline{1,L},$$

d) ograniczenie przetwarzania danych w komputerze

$$\sum_{j=1}^{J} \sigma_n t_j x_{nj}{}^{\pi} \leqslant 1 \qquad \text{dla } n \in \beta,$$

e) ograniczenie liczby kanałów w węźle

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} x_{lk}^{e}\, x_{nj}^{\pi} \leqslant \sum_{j=1}^{J} c_j\, x_{nj}^{\pi} \qquad \text{dla } n \in \beta,$$

przy czym l odpowiada parze (i, n) lub (n, i),
c_j – dopuszczalna liczba kanałów dla komputera typu j.

f) ograniczenie przydziału co najwyżej jednego kanału do pary węzłów

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj}^{\pi} \leqslant 1 \qquad \text{dla } n \in \beta,$$

g) ograniczenie przydziału co najwyżej jednego kanału do pary terminali

$$\sum_{k=1}^{K} x_{lk}^{e} \leqslant 1 \qquad \text{dla } = \overline{1,L},$$

h) ograniczenie koniecznych usytuowań kompleksów obliczeniowych

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj}^{\pi} = 1 \qquad \text{dla } n \in Y_0,$$

2. F – kryterium jakości
$F : X \to \mathcal{R}^2$
$\mathrm{F}(x) = [F_1(\mathrm{x})], \qquad$ dla $x \in X$,
$F_1(x)$ – wartość liczbowa rocznego kosztu dzierżawy kanałów zwiększonego o odpowiednią część kosztów zakupu komputerów,
$F_2(x)$ – średni czas reakcji systemu,
$Y = F(X)$ – przestrzeń kryterialna (zbiór ocen).

3) $\mathbf{R}$ – relacja dominowania w przestrzeni kryterialnej
Niech $y, z \in Y$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$

$$\mathbf{R} = \{(y, z) \in Y \times Y \,|\, y_1 \leqslant z_1, y_2 \leqslant z_2\} \subset Y \times Y$$

Zwykle zbiór rozwiązań optymalnych w sensie Pareto jest bardzo liczny. W [3] sformułowano zadanie wyznaczania rozwiązań kompromisowych ze zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. Analogicznie można sformułować odpowiednie zagadnienie poszukiwania rozwiązań kompromisowych dla powyższego zadania.

4. ZASADY PROJEKTOWANIA SUBOPTYMALNYCH STRUKTUR

Koncepcja metody polega na iteracyjnym poszukiwaniu zarówno rozwiązań dominujących, niezdominowanych oraz kompromisowych, przy czym w każdej iteracji generowane są różne rozwiązania początkowe. W końcowym etapie następuje weryfikacja uzyskanych rozwiązań i prezentowane są alternatywne rozwiązania dominujące lub kompromisowe. Realizacja pośrednich celów obliczeniowych polegających na wyznaczaniu rozwiązań określonej klasy opiera się na elementarnych

modyfikacjach aktualnej sprzętowej struktury SK, co jest zasadą stosowaną np. w heurystycznych metodach perturbacyjnych wyznaczania struktur topologicznych SK. Modyfikacją elementarną może być wymiana typów komputerów, wymiana typów kanałów, redukcja komputera lub kanału, dodatkowe przydzielenie komputera lub kanału. Ograniczenia typu f/ i g/ łatwo można spełnić, jeżeli wprowadzone zostaną następujące wektory charateryzujące strukturę sprzętową SK:

$$XPI = (xpi_1,...,xpi_n,...,xpi_N), \quad \text{gdzie } xpi_n = j \text{ dla } x_{nj}^{\pi} = 1,$$
$$XE = (xe_1,...,xe_l,...,xe_L), \quad \text{gdzie } xe_l = k \text{ dla } x_{lk}^{e} = 1.$$

Algorytm projektowania suboptymalnych struktur sieciowych jest następujący:

1. Przygotuj dane wejściowe.
2. $i := 0$, $\Delta i := \left| \frac{NJK}{max\ \{N,J,K\}} \right|$, $i_{max} := NJK$.
3. Wyznacz rozwiązanie dopuszczalne.
4. Czy wyznaczono rozwiązanie dopuszczalne?
   Jeśli tak, to przejdź do pkt 5.
   Jeśli nie, to przejdź do pkt. 8.
5. Wyznacz lokalne rozwiązanie dominujące.
   Jeśli tak, to przejdź do pkt 7.
   Jeśli nie, to przejdź do pkt 6.
6. Wyznacz lokalnie optymalny w sensie Pareto zbiór rozwiązań oraz lokalny zbiór rozwiązań kompromisowych.
7. Zweryfikuj globalne rozwiazanie dominujące, globalny zbiór rozwiązań optymalnych oraz globalny zbiór kompromisowy za pomocą lokalnych rozwiązań.
8. Czy $i \geqslant i_{max}$
   Jeśli tak, to przejdź do pkt 9.
   Jeśli nie, to $i := i + \Delta i$ i przejdź do pkt 3.
9. Zweryfikuj globalny zbiór rozwiązań optymalnych w sensie Pareto oraz globalny zbiór kompromisowy za pomocą globalnego rozwiązania dominującego.
10. Jeśli rozwiązanie dominujące nie istnieje, to prezentuj rozwiązania kompromisowe. STOP.

W przeciwnym razie prezentuj rozwiązania dominujące. STOP.

Rozszerzony opis poszczególnych etapów powyższego algorytmu znajduje się w [3]. Złożoność obliczeniowa metody jest rzędu O ($\bar{N}^8$), gdzie $\bar{N} = max\ \{N,J,K\}$. Algorytm oprogramowano w języku Fortran w trzech wersjach (Fortran 4, Fortran 77 i Fortran 1900). Dla SK z trzema węzłami porównano rozwiązania uzyskane za pomocą programu PRZZ, który implementuje proponowaną metodę, z rozwiązaniami optymalnymi wyznaczonymi za pomocą programu implementującego zmodyfikowaną metodę pełnego przeglądu. Uzyskane rozwiązania suboptymalne odbiegają co najwyżej o 15% od rozwiązań optymalnych. Przy większej liczbie węzłów nie można stosować metody pełnego przeglądu ze względu na czas obliczeń.

Rozważmy następujący przykład liczbowy. Wektor odległości między elementami czterowęzłowej sieci ma postać (130, 360, 100, 330, 150, 450) [km]. Wstępnie zakwalifikowano dwa typy minikomputerów HP/3000 (typ π_1) oraz IBM/RISC/6000

(π_2). Przyznaje się, że kanały będą dzierżawione z resortu łączności. Kanał typu e_1 posiada przpustowość 1200 bit/s a kanał typu e_2 4800 bit/s. Przyjęto, że roczne nakłady nie powinny przekroczyć 1 mld zł, a czas realizacji zadań nie może być dłuższy niż 200 s. Stopa dyskonta wynosi 10%, a koszty komputerów g_1 = 150 mln zł, g_2 = 400 mln zł. Wektory współczynników umożliwiające wyznaczenie kosztów dzierżawy kanałów wynoszą q = 0,1,0,2, q^m = 0,1,0,2 przy wykładniku α = 1. Wektor intensywności wprowadzanych wiadomości do sieci ma postać (2000, 2000, 0, 1000) [bit/s]. Średnia długość wiadomości $1/\mu$ wynosi 500 bitów, a średnia długość wiadomości i danych sterujących $1/\mu'$ wynosi 600 bitów. Stały czas przetwarzania wiadomości w węźle T_0 ma wartość 0,1 s. Intensywności wprowadzanych pytań do komputerów są następujące (1000, 500, 0, 500) [bit/s]. Ponadto t_1 = 1 s, t_2 = 0, 3 s, $c_1 = c_2 = 5$.

Za pomocą programu PRZZ wyznaczono dwa rozwiązania suboptymalne w sensie Pareto:

A = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0),
B = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0),

które charakteryzują się następującymi wskaźnikami $F(A)$ = 402, 4, 31, 5) $F(B)$ = (349. 9, 71. 5). Rozwiązanie A jest droższe, ale odznacza się krótszym czasem realizacji zadań niż rozwiązanie B. Łatwo pokazać że rozwiązanie A jest rozwiązaniem subkompromisowym. Program PRZZ można również wykorzystać do generowania rozwiązań przedstawionych decydentowi do wyboru, gdyż często decydent (zleceniodawca) wykorzystuje subiektywne kryteria ograniczenia przy dokonywaniu wyboru struktury SK.

ZAKOŃCZENIE

W pracy sformułowano problem wyznaczania sprzętowej struktury SK w postaci zagadnienia optymalizacji wektorowej. Dokonano modyfikacji modelu Janbycha. Scharakteryzowano metodę projektowania suboptymalnych wariantów sieciowych.

Interesującym kierunkiem modyfikacji przedstawionego podejścia jest uwzględnienie kryterium i ograniczeń związanych z niezawodnością sieci. Ponadto atrakcyjne wydaje się uwzględnienie w modelu dodatkowych usług oferowanych przez sieć [9]. W praktyce istotne znaczenie ma opracowanie dialogowej metody projektowania sprzętowej struktury sieci komputerowej.

BIBLIOGRAFIA

1. A. A m e l j a ń c z y k : *Optymalizacja wielokryterialna.* Warszawa, WAT, 1986
2. A. A m e l j a ń c z y k : *Optymalizacja wielokryterialna w problemach sterowania i zarządzania.* Warszawa, PAN, 1984

3. J. B a l i c k i : *Optymalizacja rozdziału zadań i wybranych zasobów w sieci komputerowej.* Warszawa, WAT, 1987
4. S. K. C h a n g : *A Model for Distributed Computer System Design.* IEEE Transactions of Systems, Man and Cybernetics, vol. emc-5, no 6 may 1976, pp. 344–359
5. W. F i n d e i s e n (red.) : *Analiza systemowa – podstawy i metodologia.* Warszawa, PWN, 1985
6. M. J. G o n z a l e s, B. W. J o r d a n : *A Framework for the Quantitative Evaluation of Distributed Computer Systems.* IEEE Transactions on Computers, vol. com –29, no Decemoer 1980, pp. 1084–1094
7. G. F. J a n b y c h : *Optymalizacja struktury informacjonno-vyczisliteilnoj sieti mietodom vietviej i granic.* AiVT, no 5, 1986, ss. 3–13
8. L. K l e i n r o c k : *Quenening Systems.* Vol. 2: *Computer Applications,* New York: John Wiley, 1976
9. R. M. P o t t e r : *ISND protocol and architectures models.* Computers Networks 1985, no 3/4, pp. 157–166
10. T. Y u ' c.t. : *Algorithms to Process Distributed Queries in Fast Local Networks.* IEEE Transactions on Computers, 1987, no 10, pp. 1153–1164

J. BALICKI

THE VECTOR OPTIMIZATION THE HARDWARE STRUCTURE OF COMPUTER NETWORKS

Summary

In the paper the problem of finding a hardware structure of the computer network has been formulated in the form of vector optimalization problem. To the estimation of the design two criterions has been used: the economical criterion and the criterion of the quality of the networks work. To solve the problem, a suboptimal method of finding optimal solutions has been proposed.

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, Z. 1–2, SS. 13–22

621.3.011.22

Stability analysis of linear active circuts containing periodically switched resistors

MIROSŁAW KOWALSKI

SŁAWOMIR BEK

Instytut Elektroniki, Politechnika Łódzka

Otrzymano 1989.06.24

Autoryzowano do druku 1990.07.11

The problem of stability analysis of linear active circuits containing periodically switched resistors (R-switched circuits) is considered in the paper. From analysis of the second-order R-switched circuit it follows that R-switched circuits may be unstable for certain values of circuits elements and switching signals parameters even if the respective circuit transfer functions corresponding to the time intervals in which the circuits are stationary have poles located strictly in the left half-plane of the complex plane. The state space method, the classical theory of linear systems of differential equations with periodically varying coefficients and the Hurwitz stability criterion are used for stability analysis of R-switched circuits.

1. INTRODUCTION

This paper is devoted to stability analysis of the system consisted of a finite number of $\bar{n}$ – dimensional, linear, time-invariant dynamical subsystems which are determined on disjoint and periodically iterated in fixed order time intervals with given length. Such a system may be considered as a mathematical model of linear active circuit containing periodically switched resistors (R-switched circuit). One of the most important applications of R-switched circuits is in the area of realization of electronically tunable active R-switched filters [2,3,5]. Tunable active filters have proved to be useful in such areas as the analysis of seismic data, adaptive filtering of signals from noisy communication channels, etc. Although a lot of papers have been published on analysis and design of R-switched circuits only very few concern stability analysis of such circuits. In this paper the state space method, the classical theory of linear periodic systems of differential equations and the Hurwitz stability criterion are used for stability analysis of R-switched circuits. A similar problem concerning stability analysis of linear time-varying (in particular piecewise constant periodically varying) RC circuits containing two-terminal resistors, capacitors and independent voltage or current sources is considered in [1].

2. STABILITY ANALYSIS OF LINEAR ACTIVE CIRCUITS CONTAINING PERIODICALLY OPERATED SWITCHES

Consider a linear active circuit containing two-terminal resistors, capacitors, independent sources, four types of controlled sources: current-controlled voltage sources, voltage-controlled current sources, voltage-controlled voltage sources, current-controlled current sources and l_{R_s} periodically switched resistors R_{si}, $i = 1, 2,...,l_{R_s}$. A passive 1-port consisted of an ideal switch S_i and two-terminal resistors whose resistances are R_{ON} and $R_{OFF} - R_{ON}$, where $0 \leqslant R_{ON} < R_{OFF} \leqslant \infty$ may be used as a terminal model of switched resistor R_{si} (Fig. 1). It is assumed thad every switch S_i is driven by a switching signal $v_{si}(t)$ in the form of respective sequence of rectangular pulses with period T, initial phase φ_i and the pulse-width τ_i (Fig. 2) (in particular $\varphi_i = \varphi$, $\tau_i = \tau$, $i = 1, 2,..., l_{Rs}$ and the switches are driven synchronously). The plot of resistance $R_{si}(t)$ of the corresponding model of switched resistor R_{si} as

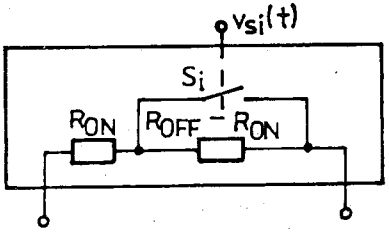


Fig. 1. Terminal model of switched resistor R_{si}

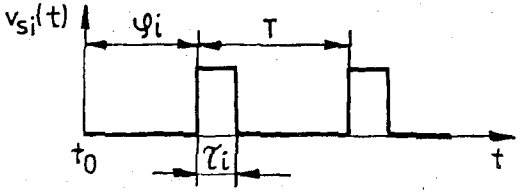


Fig. 2. Sequence of switching pulses for switched resistor R_{si}

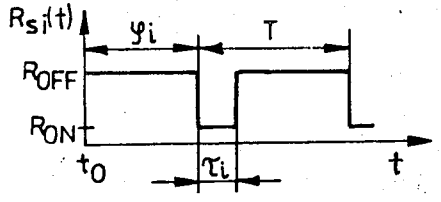


Fig. 3. The plot of resistance $R_{si}(t)$ as a function of time

a function of time is shown in Fig. 3. Assume that in every time interval $\Delta_{n,i} := [t_0 + nT + \sum_{j=1}^{i-1} t_j, t_0 + nT + \sum_{j=1}^{i} t_j]$, $i = 1, 2,..., k$, $n = 0, 1, 2,...$, where $t_0 \in [0,\infty)$ is the

initial moment of time, $t_j \in (0, \infty)$ are given numbers such that $\sum_{j=1}^{k} t_j = T$, in which the circuit is stationary system there exists its mathematical model in the form of corresponding systems of state equations

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u_i(t) \tag{1}$$

where $x(t) \in C([t_0, \infty); R^{\bar{n}})$ is a state vector, $u_i(t) \in C(\Delta_{n,i}; R^{\bar{m}_i})$ is a given vector function of excitation in the interval $\Delta_{n,i}$, $A_i \in R^{\bar{n} \times \bar{n}}$, $B_i \in R^{\bar{n} \times \bar{m}_i}$ are constant matrices, $\bar{n}$ is order of complexity of the circuit, $\bar{m}_i$ denotes the number of independent sources of the circuit in the interval $\Delta_{n,i}$ (in particular if $0 < R_{ON} < R_{OFF} < \infty$, then $\bar{m}_i = \bar{m}\ \forall\ \Delta_{n,i}$, i = 1, 2,..., k, $n = 0, 1, 2,...$, where $\bar{m}$ is a natural number).The stability of circuit containing periodically operated switches may be investigated on the basis of classical theory of linear systems of differential equations with periodically varying coefficients [6]. The free (unforced) circuit model consisted of homogeneous systems of state equations

$$\dot{x}(t) = A_i x(t),\ t \in \Delta_{n,i} \tag{2}$$

$i = 1, 2,..., k$, $n = 0, 1, 2,...$ may be used for stability analysis. Let

$$\Phi(T) = \prod_{i=k}^{1} e^{A_i t_i}$$

denotes the value of the matricant of the set of systems (2) for $t = T$. From Floquet's and Lyapunov's theorems it follows that linear T-periodic system of state equations with piecewise constant state matrix

$$A(t) = \begin{cases} A_1, & t \in \Delta_{n,1} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ A_k, & t \in \Delta_{n,k},\ n = 0,1,2... \end{cases}$$

is stable if and only if all the eigenvalues ρ_j, $j = 1, 2,..., \bar{n}$ of the matrix $\Phi(T)$ (characteristic multipliers of the set of systems (2)) are located inside the unit circle $|\rho| \leqslant 1$ of the complex plane ρ, and if for some eigenvalues $|\rho_j| = 1$, then the respective eigenvalues must have simple elementary divisors [4,6]. The considerad system of state equations is asymptotically stable if and only it all characteristic multipliers of (2) are located strictly inside the unit circle $|\rho| < 1$ of the complex plane. The characteristic multipliers satisfy the $\bar{n}$th- order polynomial equation witch real coefficients

$$\det[\rho 1_{\bar{n}} - \Phi(T)] = \sum_{j=0}^{\bar{n}} a_{\bar{n}-j} \rho^j = 0 \tag{3}$$

where $1_{\bar{n}} \in R^{\bar{n} \times \bar{n}}$ denotes the unit matrix,

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -\operatorname{tr}\Phi(T)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}\left[a_1 \operatorname{tr}\Phi(T) + \operatorname{tr}\Phi^2(T)\right]$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}\left[a_2 \operatorname{tr}\Phi(T) + a_1 \operatorname{tr}\Phi^2(T) + \operatorname{tr}\Phi^3(T)\right]$$

.....

$$a_i = -\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} a_{i-j} \operatorname{tr}\Phi^j(T)$$

.....

$$a_{\bar{n}} = (-1)^{\bar{n}} e^{\sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr} A_i t_i}.$$

By using a linear fractional transformation

$$\rho = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \tag{4}$$

mapping the left half-plane $Re\lambda < 0$ of the complex plane λ into the unit circle $|\rho| < 1$ of the complex plane ρ one can write the equation (3) in the form

$$f(\lambda) = 0,$$

where $f(\lambda) = \sum_{j=0}^{\bar{n}} b_{\bar{n}-1} \lambda^j$ is a polynominal with real coefficients and $b_{\bar{n}} > 0$. From Floquet's and Lyapunov's theorems as well as from the properties of transformation (4) it follows that the free linear active circuit containing periodically operated switches is asymptotically stable if and only if $f(\lambda)$ is the Hurwitz polynomial, e.g.

$$Re\,\lambda_i < 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \bar{n}. \tag{5}$$

If there exists $j \in \{1, 2, \ldots, \bar{n}\}$ such that $Re\,\lambda_j > 0$, then the free circuit is unstable. The condition (5) may be verified with the aid of the Hurwitz criterion. For the second-order circuits ($\bar{n} = 2$) this criterion leads to the system of inequalities

$$b_0 > 0, b_1 > 0, b_2 > 0, \tag{6}$$

where the coefficients b_i, $i = 0, 1, 2$ are linear combinations of a_i, $i = 0, 1, 2$ (3)

$$b_0 = 1 + a_1 + a_2, b_1 = 2(1 - a_2), b_2 = 1 - a_1 + a_2.$$

However, this follows from the properties of the transformation (4). It is not a rare case in practice when the coefficient $a_2 \in (0,1)$ and consequently $b_1 > 0$. The boundary of the stability region in this case may be found from the system of equalities

$$b_0 = 0 \text{ and } b_2 = 0. \tag{7}$$

The first of equalities (7) is satisfied if and only if there exists a characteristic multiplier of (2) which is equal to 1. In this case the set of systems (2) has T-periodic solution. On the other hand the second one of equalities (7) is satisfied if and only if there exists a characteristic multiplier of (2) which is equal to -1. In this case set of systems (2) has T' periodic solution, where $T'=2T$. Validity of inequalities (6) and analogous inequalities for higher-order circuits is verified with the aid of a digital computer. For low-order circuits ($\bar{n} \leqslant 4$) it is possible to find the asymptotic stability and instability regions in the space of certain circuit parameters. The task of estimation of such regions for higher-order circuits ($\bar{n} \geqslant 5$) is difficult and demands a greater amount of computation, depending on the specific circuit. However, this follows from the fact that in most cases the polynomial equation of order higher than 4 cannot be solved analytically and therefore it is not possible to obtain analytical expression for the matrix $\Phi(T)$ of higher-order circuit.

3. STABILITY ANALYSIS OF THE SECOND-ORDER R-SWITCHED CIRCUIT

Consider a linear active circuit shown in Fig. 4. It is assumed that all circuit elements (including OP AMP) are ideal. The ideal switch is driven by a signal $v_{s1}(t)$ shown in Fig. 2, where $t_0 = 0$ and $\varphi_1 = 0$. In the considered case $t_1 = \tau_1 = \gamma T$ and $t_2 = (1-\gamma)T$, where γ denotes the pulse-width to period ratio. Let $R_1 = R_2 = R$ and $C_1 = C_2 = C$. Choose $x_1(t) = v_1(t)$ and $x_2(t) = v_2(t)$ as the coordinates of the state vector, where $v_1(t)$ and $v_2(t)$ denote the respective voltages (Fig. 4).

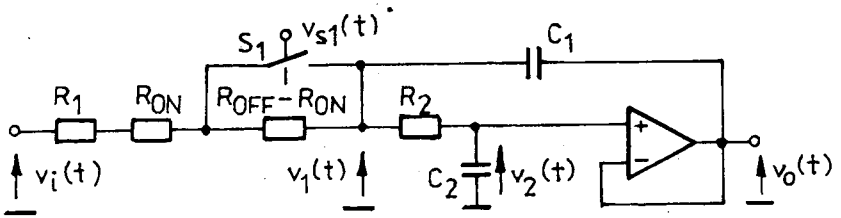


Fig 4. Second-order R-switched circuit

The system of state equations of the circuit has the form

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{RC} \begin{bmatrix} \frac{R}{R + R_s} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{RC} \begin{bmatrix} \frac{R}{R + R_s} \\ 0 \end{bmatrix} v_i(t),$$

where $R_s = R_{ON}$ in the time intervals $\Delta_{n,1}$, $n=0, 1, 2,...$ in which the switch is closed, and $R_s = R_{OFF}$ in the intervals $\Delta_{n,2}$, $n=0, 1, 2,...$ in which the switch is opened, where $v_i(t) \in L^i([0,\infty); R)$ denotes the input voltage. The coefficients a_1 and a_2 may be derived from equalities (3) and have the form

$$a_1 = -e^{-\frac{T(R + R_{ON}) + \gamma T(R_{OFF} - R_{ON})}{(R + R_{ON})(R + R_{OFF})C}} - e^{-\frac{T}{RC}}$$

$$a_2 = e^{-\frac{T(R + R_{ON})(2R + R_{OFF}) + \gamma TR(R_{OFF} - R_{ON})}{(R + R_{ON})(R + R_{OFF})RC}},$$

By substituting these expressions into the system of inequalities (6) it can be proved that these inequalities are valid for any positive and finite values of parameters R, C, T, R_{ON}, R_{OFF} and $\gamma \in [0,1]$. Thus, it follows that in the considered case ($C_1 = C_2$ and $R_1 = R_2$) the circuit of Fig. 4 is asymptotically stable. In the limit of very large switching frequencies $f_s = 1/T$ both characteristic multipliers of the set of homogeneous systems of state equations to 1 and have simple elementary divisors. The approximate asymptotic frequency response plot of the circuit gain for the case when the switching frequency is much greater than the signal frequency is shown in Fig. 5, where

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{R\gamma}{R + R_{ON}} + \frac{R(1 - \gamma)}{R + R_{OFF}}}$$

Let us now consider the case when $R_{ON} = 0$ and $R_{OFF} = \infty$ in the circuit of Fig. 4.

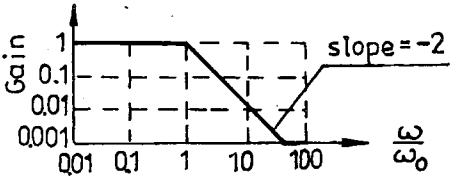


Fig. 5. The approximate asymptotic frequency response plot of the circuit gain

The coefficients a_1 and a_2 of equation (3) have the form

$$a_1 = -e^{-\frac{T}{RC}} - e^{-\frac{\gamma T}{RC}}$$

$$a_2 = e^{-\frac{(1 + \gamma)T}{RC}}.$$

From analysis of inequalities (6) it follows that these inequalities are fulfilled for any positive and finite values of parameters R, C, T and $\gamma \in (0,1]$. For very large switching frequencies both characteristic multipliers of the set of homogeneous of state equations tend to 1 and have simple elementary divisors. So far we have considered the particular case of the circuit shown in Fig. 4 when $R_1 = R_2$ and $C_1 = C_2$. Consequently, the poles of the transfer–voltage ratio of the circuit in each interval $\Delta_{n,i}$, $i = 1, 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ have been negative real. Assume now that $R_1 \neq R_2$ and $C_1 \neq C_2$. In this case it is convenient to choose $x_1(t) = v_0(t)$ and $x_2(t) = \dot{v}(t)$ as the

coordinates of the state vector, where $v_0(t)$ denotes the output voltage of the OP AMP (Fig. 4). The system of state equations describing the free circuit behaviour has the form

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{(R_1 + R_s)C_1R_2C_2} & -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1 + R_s} + \frac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

where $R_s = R_{ON}$ in the time intervals $\Delta_{n,1}$, $n=0, 1,2,...$ in which the switch is closed, and $R_s = R_{OFF}$ in the time intervals $\Delta_{n,2}$, $n=0, 1, 2,...$ in which the switch is opened. When analysing stability of the circuit we consider two cases:

1. The poles of the transfer-voltage ratio of the circuit in every interval $\Delta_{n,i}$, $i=1, 2$, $n=0, 1, 2,...$ are real and distinct.

2. The poles of the transfer-voltage ratio of the circuit in every interval $\Delta_{n,i}$, $i=1, 2$, $n=0, 1, 2...$ are complex conjugate.

In both cases the poles are located strictly in the left halfplane of the complex plane ($a_2 < 1$). In the first case, we obtain

$$a_1 = -\{0.5(G^2 - Y^2 - 4D)\operatorname{sh}[(1-\gamma)T\sqrt{\delta_2}]\operatorname{sh}(\gamma T\sqrt{\delta_1}) + 2\sqrt{\delta_1\delta_2}\operatorname{ch}\cdot$$
$$\cdot[(1-\gamma)T\sqrt{\delta_2}]\operatorname{ch}(\gamma T\sqrt{\delta_1})\}\sqrt{a_2}/\sqrt{\delta_1\delta_2}$$
$$a_2 = e^{-(G-Y)T - 2\gamma TY}$$

where

$$D + X = \frac{1}{(R_1 + R_{ON})C_1R_2C_2}, \quad G + Y = \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1 + R_{ON}} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$D - X = \frac{1}{(R_1 + R_{OFF})C_1R_2C_2}, \quad G - Y = \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1 + R_{OFF}} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\delta_1 = 0.25(G + Y)^2 - D - X, \quad \delta_2 = 0.25(G - Y)^2 - D + X.$$

G, D, X, Y denote the real constants.

In the second case

$$a_1 = -\{0.5(G^2 - Y^2 - 4D)\sin[(1-\gamma)T\sqrt{-\delta_2}]\sin(\gamma T\sqrt{-\delta_1}) + 2\sqrt{\delta_1\delta_2}\cos$$
$$[(1-\gamma)T\sqrt{-\delta_2}]\cos(\gamma T\sqrt{-\delta_1})\}\sqrt{a_2}/\sqrt{\delta_1\delta_2}$$
$$a_2 = e^{-(G-Y)T - 2\gamma TY}$$

The validity of inequalities (6) for different values of parameters G, D, T, γ and different values of variables X and Y in both considered cases was verified with the aid of a microcomputer. Fig. 6 presents, for example, the stability and instability regions (shaded sector) of the circuit of Fig. 4 for the case of complex poles and the following values of parameters: $G=0.1\ s^{-1}$, $D=10\ s^{-2}$, $T=6.28$ s, $\gamma=0.5$. Fig 7 presents the stability and instability regions (shaded sectors) of the circuit for the

case of complex poles and G=0.4 s^{-1}, D=10^4 s^{-2}, T=6.28 s, γ=0.5. To the point X=9.8 s^{-2}, Y=0.048 s^{-1} of instability region shown in Fig. 6 there correspond, for example, the following values of circuit parameters: R_1 = i kΩ, R_2=1.96 kΩ, C_1=10^4 μF, C_2=2.57 μF, R_{ON}=1 Ω and R_{OFF}=100 kΩ.

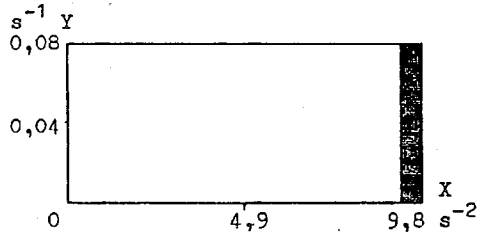


Fig. 6. Stability and instability regions (shaded sector) of R-switched circuit for G=0.1 s^{-1}, D=10 s^{-2}, T=6.28 s, γ=0.5

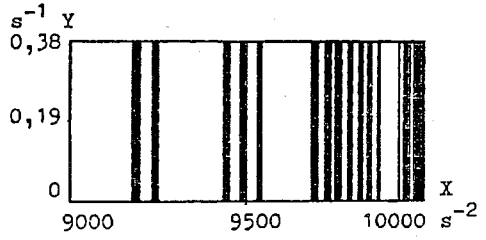


Fig. 7. Stability and instability regions (shaded sectors) of R-switched circuit for G=0.4 s^{-1}, D=10^4 s^{-2}, T=6.28 s, γ=0.5

The mathematical theory employed in the paper is general and can also be used for stability analysis of other classes of linear periodically switched circuits. Fig. 9 presents, for example, stability and instability regions (shaded sectors) of AC voltage regulators (Fig. 8) for the following data:
T = 0.628 s, γ = 0.5, T_0 = 1s, T_1 = 10^{-4} s, T_2=10^{-2}s where T_0 = R_0C, T_1 = R_1C, T_2 = R_2C,

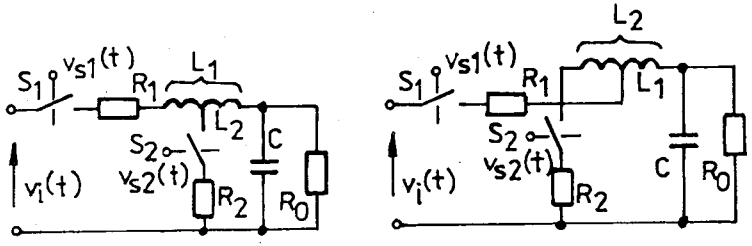


Fig. 8. AC voltage regulators circuits

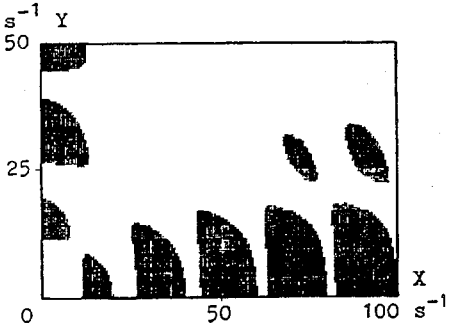


Fig. 9. Stability and instability regions (shaded sectors) of AC voltage regulators circuits

$$X = \sqrt{\left|\left(\frac{1}{T_0} - \frac{R_1}{L_1}\right)^2 - 4\frac{R_1}{L_1 T_1}\right|}, \quad Y = \sqrt{\left|\left(\frac{1}{T_0} - \frac{R_2}{L_2}\right)^2 - 4\frac{R_2}{L_2 T_2}\right|}$$

The switching signal $v_{s1}(t)$ is shown in Fig. 2, where $t_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$ and $\tau_1 = \gamma T$. The switching signal $v_{s2}(t)$ is the inverse of $v_{s1}(t)$.

CONCLUDING REMARKS

The problem of stability analysis of R-switched circuits was considered in the paper. From stability analysis of the second-order R-switched circuit it follows that such circuits may be unstable for certain values of circuits elements and switching signals parameters even if the respective stationary models describing the R-switched circuits in the corresponding time intervals $\Delta_{n,i}$ are asymptotically stable. The results obtained in the work confirm the fact that stability of R-switched circuits cannot be concluded from stability of the corresponding stationary models.

REFERENCES

1. C. A. Desoer, A. Paige: *Linear Time Varying G–C Networks: Stable and Unstable.* IEEE Transactions on Circuit Theory, 1963, vol. CT–10, No. 6, pp. 180–190
2. L. T. Bruton, R. T. Pederson: *Tunable RC–Active Filters Using Periodically Switched Condustances.* IEEE Transactions on Circuit Theory, 1973, vol. CT–20, No. 3, pp. 294–301
3. R. L. Geiger, P. E. Allen, D. T. Ngo: *Switched-Resistor Filters – a Continuous Time Approach to Monolithic MOS Filter Design.* IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1982, vol. CAS–19, No. 5, pp. 306–315
4. J. K. Hale: *Oscillations in Nonlinear Systems.* New York: McGraw-Hill, 1963
5. K. Hirano, S. Nishimura: *Active RC Filters Containing Periodically Operated Switches.* IEEE Transactions on Circuit Theory, 1972, vol. CT–19, No. 3, pp. 253–260
6. V. A. Yakubovitch, V. M. Starzinsky: *Linear Differential Equations with Periodically Varying Coefficients and Their Applications.* Moscow: Nauka, 1972 (in Russian)

M. KOWALSKI, S. BEK

ANALIZA STABILNOŚCI LINIOWYCH OBWODÓW AKTYWNYCH ZAWIERAJĄCYCH OPORNIKI O OKRESOWO PRZEŁĄCZANYCH REZYSTANCJACH

Streszczenie

W pracy rozważono zagadnienie analizy stabilności liniowych obwodów aktywnych zawierających oporniki o okresowo przełączanych rezystancjach (obwody R-przełączane). Na przykładzie obwodu drugiego rzędu pokazano, że obwody R-przełączane mogą okazać się niestabilne przy pewnych wartościach parametrów elementów obwodów i sygnałów przełączających, nawet wówczas, gdy odpowiednie transmitancje, opisujące obwody w przedziałach stacjonarności, mają bieguny położone ściśle

w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej, a przełączane rezystancje przyjmują skończone i niezerowe wartości. Do analizy stabilności obwodów R-przełączanych wykorzystano metodę zmiennych stanu, klasyczną teorię liniowych układów równań różniczkowych zwyczajnych o okresowo zmiennych współczynnikach i kryterium Hurwitza.

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, Z. 1–2, SS. 23–33

621.3.062:681.31

Reprezentacja wiedzy o układach elektronicznych

CZĘŚĆ I. REPREZENTACJA W JĘZYKU KLAUZUL

HENRYK BUDZISZ

Wyższa Szkoła Inżynierska, Instytut Elektroniki, Koszalin

Otrzymano 1990.05.15

Autoryzowano do druku 1991.01.06

Przedyskutowano metody reprezentacji wiedzy o elementach i układach elektronicznych. Podkreślono rolę symbolu w reprezentacji obiektów, zjawisk lub koncepcji. Przedstawiono opis obiektów złożonych za pomocą struktur symbolicznych – wyrażeń funkcyjnych i list. Relacje między obiektami zostały wyrażone przez zastosowanie predykatów. Natomiast koncepcje składające się na język klauzul [14] umożliwiają wyrażanie twierdzeń. Reprezentacja wiedzy w postaci klauzul, umożliwia przetwarzanie jej w oparciu o regułę rezolucji.

1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach obserwuje się ciągły wzrost zainteresowania zastosowaniem metod sztucznej inteligencji w opisie, analizie i projektowaniu układów elektronicznych [2,8]. Zastosowano je między innymi do projektowania układów VLSI [7,10], systemów komputerowych [18], układów analogowych [3,6,9,11], analizy i syntezy układów [1,5,12] oraz diagnozowania urządzeń elektronicznych [21]. Systemy informatyczne wykorzystujące metody sztucznej inteligencji do pewnej wąskiej klasy zagadnień, imitują sposób rozumowania eksperta i dlatego znane są pod nazwą systemów ekspertowych. Ważną rolę przy projektowaniu tych systemów odgrywa sposób reprezentacji wiedzy.

2. ROLA I ZNACZENIE REPREZENTACJI

Jak pokazuje doświadczenie, opracowanie właściwej reprezentacji jest często kluczem, który pozwala zamienić trudne problemy na problemy proste. Problemowi reprezentacji poświęca się więc wiele miejsca przy projektowaniu systemów przetwarzania wiedzy [2,13,16,18,20,22].

Reprezentacja obiektu jest konwencją w jakiej ten obiekt jest przedstawiany. Pod pojęciem tym rozumie się zbiór syntaktycznych i semantycznych zasad, według których opisuje się pewną klasę obiektów [22]. Syntaktyka reprezentacji określa dopuszczalne symbole i związki między nimi. Zbiór zasad syntaktycznych jest często wyrażany w notacji Backusa albo w postaci formalnej gramatyki języka służącego do opisu obiektów. Semantyka reprezentacji określa natomiast znaczenie symboli i związków dopuszczalnych przez syntaktykę.

Teoretycznie rzecz biorąc, wszystkie reprezentacje są równoważne z punktu widzenia ich późniejszego zapisu w pamięci komputera. Są zapisane jako pewien ciąg liczb lub też schodząc na jeszcze niższy poziom, jako ciąg bitów. Jest to tak samo prawdziwe jak stwierdzenie, że każdy tekst składa się ze słów (lub znaków). Z praktycznego punktu widzenia, stwierdzenia takie nie mają żadnej wartości.

Przyjmując określoną reprezentację, podejmuje się decyzje, które elementy opisu będą traktowane jako pierwszoplanowe, a które jako drugo- lub trzecioplanowe. Spośród kilku reprezentacji, chociaż teoretycznie równoważnych, ta będzie lepsza, w której łatwiej, wygodniej i efektywniej można opisać obiekt. Stwierdzenie takie jest może za słabe. Można powiedzieć, że wybór właściwej reprezentacji stwarza możliwość szybkiego postępu w realizacji systemu przetwarzania wiedzy. Postęp taki byłby nieprawdopodobnie kosztowny przy nieadekwatnej reprezentacji [16,22].

Rolę reprezentacji w przedstawianiu obiektów można porównać z rolą gramatyki i słownika w języku naturalnym, które określają jak organizować słowa w zdania, w różnych czasach, trybach i formach, a także co poszczególne słowa, frazy i konstrukcje gramatyczne oznaczają.

3. SYMBOLE I STRUKTURY SYMBOLICZNE

Reprezentację wiedzy i jej przetwarzanie umożliwiają dwie podstawowe koncepcje [17]:

– symbole i struktury na nich zbudowane,

– aparat do manipulacji strukturami symbolicznymi.

Najprostszą reprezentacją obiektu jest przypisanie mu symbolu. Nawet w tak prostym przypadku obiekt fizyczny ma często kilka reprezentacji. Na przykład rezystor w reprezentacji graficznej jest przedstawiany symbolem —▭— lub ⩘ , a w reprezentacji matematycznej symbolem **R** lub **r**, natomiast w tekście reprezentacją jest ciąg liter, które tworzą wyrazy *opornik* lub *rezystor*. Postać symbolu reprezentującego obiekt jest bez znaczenia, pod warunkiem, że jest on odróżnialny od symboli reprezentujących inne obiekty. Obiekty złożone, a także relacje zachodzące między obiektami są reprezentowane przez symbole zorganizowane w pewne struktury, np.: listy, drzewa lub sieci.

Tak jak w każdym systemie komputerowego przetwarzania informacji, przetwarzanie struktur symbolicznych musi być wyrażone w języku wolnym od wielo-

znaczności. Takim językiem jest niewątpliwie język logiki matematycznej [14,16,22]. Jak podkreśla Mostowski [15], w języku tym można wyrazić całą obecną wiedzę matematyczną. Symbol oznaczający pewien określony obiekt lub zjawisko, jest z punktu logiki stałą. Obok pojęcia stałej, występuje w logice, podobnie jak w algebrze, pojęcie zmiennej.

Odpowiednikiem zmiennej w języku naturalnym są takie wyrazy, jak „coś", „cokolwiek", „nic", „każdy", „wszystko". Przykładem użycia zmiennej może być zapis zdania:

„wszystkie układy pasywne są stabilne"

w notacji klasycznej:

$$\forall x\,[\text{układ}\,(x)\ \wedge\ \text{pasywny}\,(x) \rightarrow \text{stabilny}\,(x)]$$

lub w języku klauzul [14]:

$$\text{stabilny}\,(x) \leftarrow \text{układ}\,(x),\ \text{pasywny}\,(x).$$

Zmienna jest identyfikowana przez nazwę, a nazwa jest symbolem (w przykładzie – x). W celu zachowania przejrzystości zapisu, zmienne będą dalej oznaczane małymi literami alfabetu łacińskiego (np.: x, y lub z), a stałe identyfikatorami wieloliterowymi.

Pojęciem pomocniczym, które posłuży do zdefiniowania struktur symbolicznych jest term [14,15]. Pod pojęciem tym rozumie się stałą, zmienną lub wyrażenie funkcyjne postaci:

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_m) \tag{1}$$

gdzie: f jest symbolem funkcyjnym,
$t_1, t_2, \ldots, t_m$ – są termami.

Ta rekurencyjna definicja umożliwia budowanie złożonych struktur drzewiastych [16,22] i opis obiektów złożonych. Przykładem może być opis tranzystora MOS w postaci wyrażenia funkcyjnego:

$$\text{MOS}\left(\text{nazwa}\,(M_1),\ \text{typ}\,(n),\ \text{źródło}\,(V_{DD}),\ \text{bramka}\,(\text{we}),\ \text{dren}\,(\text{wy})\right).$$

Należy tu zaznaczyć, że symbol funkcyjny jest po prostu identyfikatorem struktury i nie ma żadnej wartości, jak na przykład funkcja algebraiczna czy funkcja logiczna.

Szczególnym rodzajem wyrażenia funkcyjnego jest wyrażenie nie zawierające symbolu funkcyjnego, czyli lista. Dla zaznaczenia tej specyfiki, lista będzie dalej wyróżniana nawiasami kwadratowymi:

$$[t_1, t_2, \ldots, t_m] \tag{2}$$

gdzie: $t_1, t_2, \ldots, t_m$ – są termami.

Poprzedni przykład może być zapisany w postaci listy:

$$\left[\text{element}\,(\text{MOS}),\ \text{nazwa}\,(M_1),\ \text{zaciski}\,([V_{DD},\ \text{we},\ \text{wy}])\right].$$

4. REPREZENTACJA WIEDZY W POSTACI KLAUZUL

Jak już podkreślono, organizacja i przetwarzanie wiedzy opisanej przez struktury symboliczne oparte jest na logice. Podstawowym narzędziem do przekształcania wyrażeń logicznych jest reguła rezolucji [14,16]. Zastosowanie tej reguły jest możliwe tylko do wyrażeń zapisanych w formie klauzul. Każdą inną formę zapisu wyrażeń można przekształcić do postaci klauzulowej. Szczegółowy sposób postępowania przedstawiony został w wielu opracowaniach [4,14,16,22]. Język klauzul jest więc jedną z możliwych notacji stosowanych do zapisu wyrażeń logicznych. Język tem jest z niewielkimi zmianami akceptowany przez język programowania logicznego Prolog [4].

4.1. DEFINICJE I OKREŚLENIA

Pojęciem pomocniczym, które posłuży do zdefiniowania klauzuli jest predykat. Wyraża on relację zachodzącą między termami i zapisywany jest w postaci:

$$p(t_1, t_2, \ldots, t_m) \tag{3}$$

gdzie: p — jest symbolem predykatu,

$t_1, t_2, \ldots, t_m$ — są termami.

Wartością predykatu jest *prawda* lub *fałsz*.

Klauzula z kolei jest zapisem związku implikacji zachodzącym między założeniami i konkluzjami:

$$B_1, B_2, \ldots, B_m \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n. \tag{4}$$

gdzie: $B_1, B_2, \ldots, B_m$, $m \geqslant 0$ są predykatami i stanowią alternatywę konkluzji klauzuli;
$A_1, A_2, \ldots A_n$, $n \geqslant 0$ są predykatami i stanowią konjunkcję warunków;
(kropka na końcu) jest terminatorem konkluzji.

Zapis ten należy interpretować następująco: jeżeli A_1 jest prawdziwe i A_2 jest prawdziwe itd i A_n jest prawdziwe, to prawdziwe jest B_1 lub prawdziwe jest B_2 itd lub prawdziwe jest B_m.

W klasycznym zapisie, symbol implikacji jest skierowany w przeciwnym kierunku

$A \rightarrow B$ (jeśli A to B).

Ze względu na późniejszy związek z zapisem klauzul w Prologu, a także dla uwypuklenia konkluzji klauzuli, zastosowano symbol odwrotny, podobnie jak w [14]

$B \leftarrow A$ (B jeśli A).

Jeżeli $m \leqslant 1$, tj. klauzula ma co najwyżej jedną konkluzję, to klauzulę taką nazywa się klauzulą Horna. Każde zagadnienie, które może być wyrażone w języku klauzul, daje się wyrazić za pomocą samych klauzul hornowskich [14], czyli klazul postaci

$$B \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n. \tag{5}$$

Przy braku warunków, tj. n=0, klauzulę należy interpretować jako bezwarunkowe stwierdzenie, nazywane też asercją. Zapis

$$B \leftarrow \tag{6}$$

należy więc odczytać „B jest prawdziwe".

Natomiast przy braku konkluzji, klauzulę należy interpretować jako stwierdzenie negatywne. Tak więc zapis:

$$\leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n. \tag{7}$$

należy odczytać następująco: „nieprawda, że A_1 jest prawdziwe i A_2 jest prawdziwe itd. i A_n jest prawdziwe".
W końcu zapis:

$$\leftarrow \cdot \tag{8}$$

interpretuje się jako stwierdzenie fałszywe. Należy je więc odczytać po prostu jako „nieprawda".

4.2.PRZYKŁADY OPISU W JĘZYKU KLAUZUL

Dla przykładu, stwierdzenie: „żyrator jest układem liniowym" można zapisać w postaci asercji:

$$\text{układ (żyrator)} \leftarrow \cdot$$
$$\text{liniowy (żyrator)} \leftarrow \cdot$$

Natomiast zdanie „modulator nie jest układem liniowym" zapisuje się następująco:

$$\text{układ (modulator)} \leftarrow \cdot$$
$$\leftarrow \text{liniowy (modulator)} \cdot$$

Znane z teorii obwodów twierdzenie „każdy układ liniowy spełnia zasadę superpozycji", w tradycyjnej notacji będzie miało postać:

$$\forall x[\text{układ}\ (x) \wedge \text{liniowy}\ (x) \rightarrow \text{spełnia}\ (x, \text{zasada\_superpozycji})]$$

co można przekształcić w klauzulę:

$$\text{spełnia}\ (x, \text{zasada\_superpozycji}) \leftarrow \text{układ}\ (x), \text{liniowy}\ (x).$$

Eliminacja kwantyfikatora szczegółowego wprowadza natomiast pewne ograniczenia. Rozważmy jako przykład zdanie „nie wszystkie układy są liniowe", które można zapisać bezpośrednio

$$\neg\ \forall x\ [\text{układ}\ (x) \rightarrow \text{liniowy}\ (x)]$$

Kolejne przekształcenia

$$\exists x\ \neg\ [\text{układ}\ (x) \rightarrow \text{liniowy}\ (x)]$$

$$\exists x \neg [\neg \text{układ } (x) \vee \text{liniowy } (x)]$$
$$\exists x [\text{układ } (x) \wedge \neg \text{ liniowy } (x)]$$

prowadzą do sformułowania „istnieje taki obiekt, który jest układem i nie jest liniowy". Przy zapisie tego sformułowania w języku klauzul, należy usunąć kwantyfikator szczegółowy.

Operacja ta wymaga wprowadzenia stałej lub symbolu funkcyjnego zamiast zmiennej wiązanej tym kwantyfikatorem [14,22]. Po zastąpieniu x stałą np. *układ_nieliniowy* otrzymuje się zapis:

$$\text{układ (układ\_nieliniowy)} \wedge \neg \text{ liniowy (układ\_nieliniowy)},$$

który w postaci klauzulowej zapisuje się następująco:

$$\text{układ (układ\_nieliniowy)} \leftarrow \cdot$$
$$\leftarrow \text{liniowy (układ\_nieliniowy)} \cdot$$

czyli

„układ_nieliniowy jest układem"
„układ_nieliniowy nie jest liniowy"

Otrzymane klauzule implikują zdanie pierwotne. Stoją bowiem w sprzeczności ze zdaniem „wszystkie układy są liniowe", tj.

$$\forall x [\text{układ } (x) \rightarrow \text{liniowy } (x)]$$

albo w formie klauzuli:

$$\text{liniowy } (x) \leftarrow \text{układ } (x).$$

Jeżeli bowiem za zmienną x podstawimy stałą *układ_nieliniowy* (czyli dokonamy konkretyzacji klauzuli), to konkluzją będzie „układ_nieliniowy jest liniowy", co jest sprzeczne z poprzednio otrzymaną konkluzją. Mówiąc innymi słowami, potwierdzenie zdania pierwotnego osiągnięto przez zaprzeczenie jego negacji. Zaprzeczeniem tym jest przykład, który prowadzi do sprzeczności. Nazwa stałej wprowadzonej zamiast zmiennej wiązanej kwantyfikatorem szczegółowym jest tu bez znaczenia. Gdyby zamiast stałej *układ_nieliniowy* użyto stałej xi_3, rozumowanie byłoby takie samo.

Innym przykładem zapisu informacji przy użyciu klauzul jest zapis zdania: „każdy tranzystor jest albo typu p albo typu n". Konstrukcję o składni „albo... albo..." zapisuje się przy użyciu spójnika $\not\equiv$, oznaczającego różnicę symetryczną [15].

$$\forall x [\text{tranzystor } (x) \rightarrow \text{typ } (x, p) \not\equiv \text{typ } (x, n)],$$

albo w postaci równoważnej:

$$\forall x \{\text{tranzystor } (x) \rightarrow [\text{typ } (x, p) \wedge \neg \text{ typ } (x, n)] \vee [\neg \text{ typ } (x, p) \wedge \text{typ } (x, n)\}.$$

Przekształcenie z zapisu w standardowym języku logiki na postać klauzulową, wykonuje się przez sprowadzenie wyrażenia logicznego do koniunkcji wyrażeń postaci:

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \vee \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_m \quad (9)$$

Zapis ten jest równoważny klauzuli (4) [4,14].
Po dalszych przekształceniach otrzymuje się:

$$\forall x\{[\text{typ}(x,p) \vee \text{typ}(x,n) \neg \text{tranzystor}(x)] \wedge \neg \text{tranzystor}(x) \vee \neg \text{typ}(x,p) \vee \neg \text{typ}(x,n)]\}$$

co zapisuje się w postaci klauzul:

$$\text{typ}(x, p), \text{typ}(x, n) \leftarrow \text{tranzystor}(x).$$
$$\leftarrow \text{tranzystor}(x), \text{typ}(x, p), \text{typ}(x, n).$$

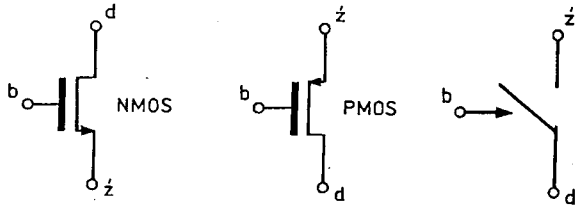
Intuicyjnie mogłoby się wydawać, że pierwsza klauzula, którą należy odczytać „jeżeli obiekt jest tranzystorem, to obiekt ten jest typu p lub obiekt jest typu n", jest kompletnym zapisem stwierdzenia pierwotnego. Tak jednak nie jest. Spójnik lub wiążący konkluzje, oznacza że rozważany obiekt może mieć oba typy jednocześnie. Druga klazula wyklucza tą ewentualność.

Ciekawym przykładem jest reprezentacja tranzystorów PMOS i NMOS (rys. 1), które w układach cyfrowych są często w uproszczeniu traktowane jako przełączniki dwustanowe (zwarte i rozwarte).

Przy takim modelu, właściwości tranzystorów można opisać następująco:

$$\forall\, b, \acute{z}, d \in \{0,1\}\ [(\text{równe}(b,1) \rightarrow \text{równe}(\acute{z},d)) \rightarrow \text{NMOS}(b,\acute{z},d)]$$
$$\forall\, b, \acute{z}, d \in \{0,1\}\ [(\text{równe}(b,0) \rightarrow \text{równe}(\acute{z},d)) \rightarrow \text{PMOS}(b,\acute{z},d)],$$

gdzie: stałe 0 i 1 oznaczają stany logiczne.



Rys. 1. Symbole tranzystorów PMOS i NMOS oraz ich model

Pierwsze sformułowanie można odczytać następująco: jeżeli stan logiczny 1 na bramce spowoduje zwarcie źródła z drenem, to mamy do czynienia z tranzystorem NMOS". W drugim zapisie na bramce występuje stan logiczny 0. W obu sformułowaniach, w warunku implikacji, występuje inna implikacja. Po odpowiednich przekształceniach, otrzymuje się następujący zapis w języku klauzul:

$$\text{NMOS}(b, \acute{z}, d) \leftarrow \text{równe}(b, 0).$$
$$\text{NMOS}(b, \acute{z}, d) \leftarrow \text{równe}(\acute{z}, d).$$
$$\text{PMOS}(b, \acute{z}, d) \leftarrow \text{równe}(b, 1).$$
$$\text{PMOS}(b, \acute{z}, d) \leftarrow \text{równe}(\acute{z}, d).$$

Istotnie, tranzystor NMOS nie może być traktowany jako przełącznik tylko wtedy, gdy $b=1$ i $\acute{z} \neq d$, czyli

$$(b = 1) \wedge \neg \text{równe}(\acute{z}, d)$$

Wszystkie inne kombinacje wartości b, $\acute{z}$ i d są dopuszczalne. Negując więc powyższe wyrażenie, otrzymuje się

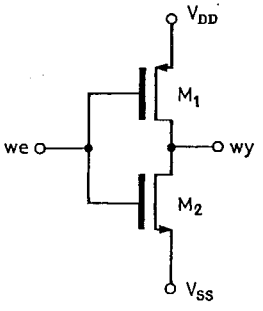
$$(b = 0) \vee \text{równe}(\acute{z}, d)$$

co odpowiada warunkom obu wyżej zapisanych klauzul. Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla tranzystora PMOS.

4.3 REPREZENTACJA DWUARGUMENTOWA

Każdy predykat n-argumentowy można przekształcić w koniunkcję $n+1$ predykatów dwuargumentowych. Weźmy jako przykład opis schematu inwertera (rys. 2) Opis ten może być następujący:

MOS (nazwa (M_1),typ (p), źródło (V_{DD}), bramka (we),dren (wy))←·
MOS (nazwa (M_2), typ (n), źródło (V_{SS}), bramka (we),dren (wy)) ←·



Rys. 2. Schemat inwertera w układzie przeciwsobnym

Powyższy zapis można przekształcić w asercje dwuargumentowe:

jest_to (MOS_1, MOS) ←·
nazwa (MOS_1, M_1) ←·
typ (MOS_1, p) ←·
źródło (MOS_1, V_{DD}) ←·
bramka (MOS_1, we) ←·
dren (MOS_1, wy) ←·

jest_to (MOS_2, MOS) ←·
nazwa (MOS_2, M_2) ←·
typ (MOS_2, n) ←·
źródło (MOS_2, V_{SS}) ←·
bramka (MOS_2, we) ←·
dren (MOS_2, wy) ←·

Zasada postępowania jest tu następująca: aby zastąpić zależność n-argumentową zależnościami dwuargumentowymi, należy tą zależność potraktować jako obiekt i nadać mu nazwę (w przykładzie MOS_1 i MOS_2). Następnie wprowadza się dodatkową zależność dwuargumentową, która wiąże ten nowy obiekt z zależnością n-argumentową (w przykładzie: *jest_to*).

Zależności *n*-agrumentowe można zastępować dwuargumentowymi zarówno w warunkach, jak i konkluzjach klauzuli.

Reprezentacja dwuargumentowa jest bardzej elastyczna od reprezentacji *n*-argumentowej. Na przykład uzupełnienie w poprzednim przykładzie informacji o zacisku podłoża, wymaga tylko dodania jednej asercji

$$\text{podłoże (MOS\_2, } V_{SS}) \leftarrow \cdot$$

Podczas gdy w reprezentacji *n*-argumentowej należałoby usunąć dotychczasową asercję i wprowadzić na jej miejsce nową asercję z dodatkowym argumentem. Wadą reprezentacji dwuargumentowej jest rozwlekłość opisu.

5. PODSUMOWANIE

Mogłoby się wydawać, że zapis wiedzy w języku klauzul jest zbytnio sformalizowany. W rzeczywstości, na tym formalizmie polega cała atrakcyjność tego sposobu zapisu wiedzy. Umożliwia on bowiem automatyczne przetwarzanie wiedzy oparte na zasadzie rezolucji [14,16].

Informacje, które mają być zapisane w postaci klauzul, są często w praktyce w naturalny sposób formułowane w postaci implikacyjnej, tj. zadań o budowie „jeśli,..., to...". Przykładem może tu być reguła projektowania: „jeżeli inwerter ma mieć szerokie pasmo, to zastosuj układ kaskadowy", którą można zapisać jako klauzulę:

inwerter (kaskada) ← pasmo (szerokie).

Taka bezpośrednia, naturalna reprezentacja nie stwarza żadnych barier w postaci zawiłych przekształceń formuł logicznych.

Jak już zaznaczono we wstępie, język klauzul jest z niewielkimi zmianami akceptowany przez Prolog. Na przykład asercję

układ (wzmacniacz) ← ·

zapisuje się w Prologu w postaci

układ (wzmacniacz).

Natomiast klauzula

inwerter (kaskada) ← pasmo (szerokie).

przyjmie w Prologu postać

inwerter (kaskada): – pasmo (szerokie).

Pewne trudności stwarza zapisanie informacji negatywnej, np.

← liniowy (modulator).

Stosuje się w takim przypadku technikę negacji przez zaprzeczenie [4]:

liniowy (modulator): — !, fail.

gdzie: *fail* jest specjalnym predykatem, który zawsze ma wartość logiczną *fałsz*, a ! oznacza zakaz wycofania

Klauzule, które reprezentują określony zasób wiedzy, ograniczony zwykle do wąskiej specjalności, tworzą tzw. bazę wiedzy. W tym kontekście, obok terminu klauzule, stosowane są określenia reguły wnioskowania (jeżeli konkluzją jest wniosek zapisywany do bazy wiedzy w postaci asercji) albo reguły produkcji lub działania (jeżeli konkluzja interpretowana jest jako polecenie) [2,8,16]. Asercje, których argumentami są pojęcia z pewnej dziedziny, nazywane są również faktami.

BIBLIOGRAFIA

1. S. Bergquist, R. Sparkes, Q. Critic: *A rule-based analyser for bipolar analog circuit designs.* IEEE 1096 Custom Integrated Circuits Conference, ss. 617—620
2. H. Budzisz, K. Wawryn, A. Guziński: *Systemy ekspertowe — nowe podejście do automatyzacji projektowania.* IX KK TOiUE, Wrocław 1986, ss. 17—28
3. H. Budzisz: *Searching for TAC filter structures using rule-based system.* ECCTD'89, Brighton, U. K. pp. 372—375
4. W. F. Clocksin, C. S. Mellish: *Programming in Prolog.* New York: Springer Verlag, 1984
5. J. A. Debosz, E. Lindberg: *Topological synthesis as a stage of RC-active filter design.* Proc. of ECCTD'87, pp. 651—656
6. M. G. De Grauwe, O. Nys, E. Vittoz, E. Dijkstra, J. Rijmenants, S. Bitz, S. Cserveny, J. Sanchez: *An Analog Expert Design Systems,* Proc. of ISSCC'87, pp. 212—213
7. H. De Man, I. Bolsens, E. Meersch, J. Cleynenbreugel: DIALOG: *An expert debagging system for MOS VLSI design.* IEEE Trans. on CAD, vol. CAD—4, No 3, July, 1985
8. G. Di Cataldo, G. Nunnari: *New trends in curcuit design via expert systems.* IS CAS'88, pp. 1787—1790
9. F. M. El-Turky: BLADES: *An Experts System for Analog Circuit Design.* 1986 IEEE IS CAS, pp. 552—555
10. T. Fujita, S. Goto: *Knowledge base algorithm for VLSI design.* Proc. ISCAS'85, pp. 877—880
11. A. H. Fung, B. W. Lee, B. J. Shen: *Self-Reconstructing Technique for Expert System-Based Analog IC Design.* IEEE Trans. on CAS, vol. 36, 1989, No 2, pp. 318—321
12. M. Gams, I. Bratko: *A circuit analysis program that explains its reasoning.* Cybernetics and Systems Research, 1984, No 2, pp. 811—815
13. F. Gunther, H. Lehmann, W. Schonfeld: *A theory for the representation of knowledge.* IBM J. of Research and Development, Jan. 1986, vol. 30, pp. 39—56
14. R. Kowalski: *Logika w rozwiązywaniu zadań.* WNT, 1989
15. A. W. Mostowski, Z. Pawlak: *Logika dla inżynierów.* PWN, 1970
16. N. J. Nilsson: *Principles of Artificial Intelligence.* Tioga Publishing Co., 1980
17. A. Nowell, H. A. Simon: *Computer Science as Empirical Inquiry: Symbols an Search.* Communications of the ACM, March 1976, vol. 19, No 3, pp. 113—126
18. W. B. Rauch-Hindin: *Artificial Intelligence in Business.* Science and Industry, Prentice-Hall, Inc., 1985
19. R. M. Stallman, G. J. Sussman: *Forward Reasoning and Dependency-Directed Backtracking in a System for Computer-Aided Circuit Analysis.* Artificial Intelligence, 1977, No 9, pp. 135—196
20. T. Tanaka: *Representation of electrical circuits in a deductive system. 1985*

21. K. W a w r y n, W. Z i n k a: *A prototype expert system for fault diagnosis in electronic device.* Proc. ECCTD'85, pp. 677–680
22. P. H. W i n s t o n: *Artificial Intelligence.* Addison-Wesley Publ. Co., 1984

H. BUDZISZ

KNOWLEDGE REPRESENTATION IN THE DOMAIN OF ELECTRONIC CIRCUITS

Part I: Representation in the clause language

S u m m a r y

In the paper methods of knowledge representation of electronic elements and circuits are discussed. The role of a symbol in the representation of objects, relations, actions and events has been emphasized. Symbolic structures – functional expressions and lists – have been used for the description of compound objects and predicates to express relations between objects. Clausual form of predicate logic [14] has been introduced to express theorems concerning electronic elements and circuits. This form is required while using resolution principle to interference new knowledge.

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, Z. 1–2, SS. 35–52

621.372.4–5
621.0.012

Funkcje strukturalne grafów układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów

ZYGMUNT WRÓBEL

Zakład Elektrotechniki i Automatyki,
Instytut Problemów Techniki Uniwersytet Śląski

Otrzymano 1989.11.10

Autoryzowano do druku 1990.12.16

W pracy przedstawiono podstawowe definicje i modele topologiczne układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów oraz parametry je charakteryzujące.

Przedstawiony sformalizowany zapis poszczególnych parametrów charakteryzujących strukturalne własności rozpatrywanych układów, będzie podstawą do sformułowania algebraicznych kryteriów homeomorfizmu (strukturalnej równoważności) tych układów [11] oraz wykorzystany w procesie syntezy topologicznej struktur kanonicznych dwójników [12].

1. WSTĘP

Jednym z ważniejszych zagadnień w procesie syntezy układów [1,7], jest opracowanie kryteriów pozwalających stwierdzić równoważność generowanych układów względem przyjętych warunków.

Celem niniejszego cyklu prac [11,12], jest przedstawienie algebraicznych kryteriów homeomorfizmu (strukturalnej równoważności w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego) układu dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów [11] oraz zaprezentowanie procedury syntezy topologicznej struktur kanonicznych dwójników [12].

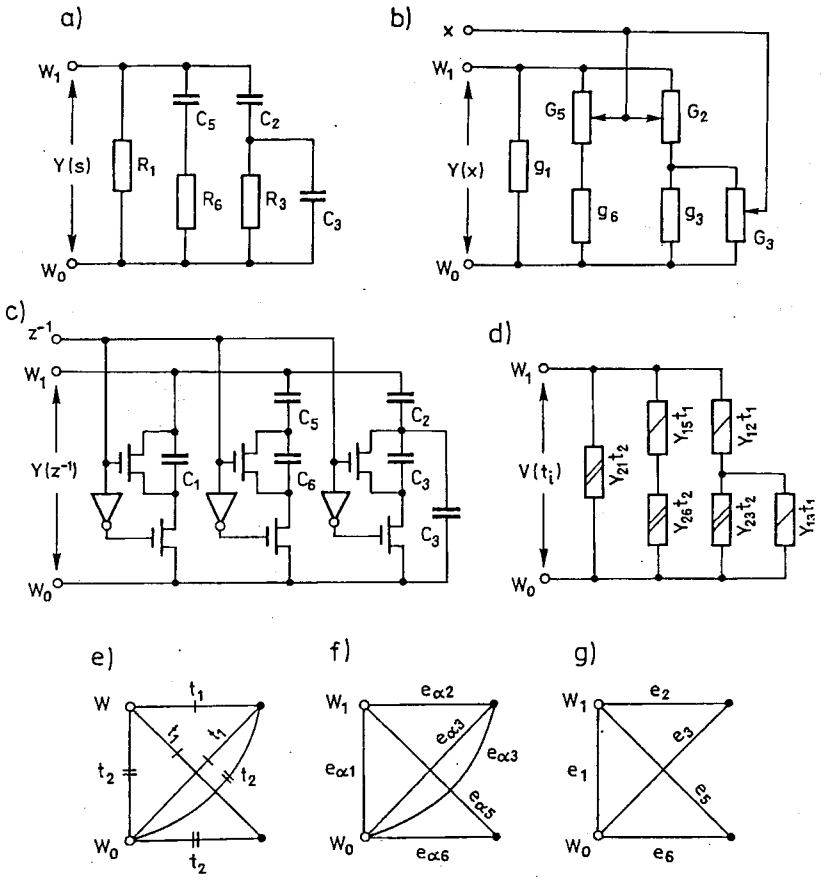
Można wyróżnić w zasadzie trzy podstawowe grupy układów elektrycznych składających się z dwóch rodzajów elementów. Pierwszą grupę stanowią układy zawierające elementy RLC. Są to układy RC, RL, LC. Parametry opisujące własności elektryczne tego typu układów są funkcjami wymiernymi częstotliwości uogólnionej s [1,7].

Drugą grupę stanowią układy zawierające niesterowane elementy, np. R, G i elementy sterowane typu R·x, G·x [6,10,13]. W pracy [6] wykazano, że istnieje bezpośrednia analogia pomiędzy klasą liniowych układów zawierających ±R, ±L,

$\pm C$ opisanych w dziedzinie przekształceń Laplace'a, a klasą układów zawierających sterowane rezystancje i konduktancje opisane w dziedzinie czasu. Parametry opisujące własności tego typu układów są funkcjami wymiernymi parametru sterującego x.

Trzecią grupę stanowią układy zawierające pojemność C i przełączaną pojemność SC [4,8]. W pracy [4] wykazano, że układ RC jest równoważny układowi zawierającemu pojemność i przełączaną pojemność przy założeniu, że wszystkie elementy R są zastąpione elementami SC symulującymi rezystancję i biliniowej transformacji między dziedzinami s i z. W ostatnich latach znacznie wzrosło zainteresowanie syntezą układów składających się z dwóch typów elementów, szczególnie wymienionej wyżej drugiej i trzeciej grupy, ze względu na ich olbrzymie możliwości zastosowań.

Na rysunku 1.a,b,c przedstawiono po jednym przedstawicielu wyżej wymienionych grup układów składających się z dwóch rodzajów skupionych



Rys. 1.a, b, c. Przykłady układów składających się z dwóch rodzajów [slssop] elementów, d) schemat ogólny, oraz ich e) bi-graf, f) multigraf, g) unigraf

liniowych skończonych stacjonarnych odwracalnych i pasywnych [slassop] elementów.

Ponieważ jak pokazano w pracach [4,6] istnieje wzajemna transformacja wyżej wymienionych typów układów, na rysunku 1.d przedstawiono ogólny schemat dwójnika składającego się z dwóch rodzajów elementów. Jeden rodzaj elementów (na przykład – pojemność C (rys. 1.a), element sterowany G(x) (rys. 1.b), przełączana pojemność C (rys. 1.c) w tych układach będziemy nazywali elementami typu $\{t_1\}$ i charakteryzowali admitancją $\{Y_1 t_1\}$, natomiast drugi rodzaj elementów (na przykład – rezystancja R (rys. 1.a), przewodność g (rys. 1.b), pojemność C (rys. 1.c) w tych układach będziemy nazywali elementami typu $\{t_2\}$ i charakteryzowali admitancją $\{Y_{2j} t_2\}$. Należy zwrócić uwagę, że parametry $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$ są wielkościami bezwymiarowymi i służą tylko do wyodrębnienia danego typu elementów w rozpatrywanych układach.

Przedstawione w pracy [11] algebraiczne kryteria homeomorfizmu grafów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów oraz zaprezentowana w pracy [12] procedura syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników, wymagają wprowadzenia pewnych abstrakcyjnych modeli tych układów oraz funkcji charakteryzujących ich strukturalne własności.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie podstawowych definicji oraz modeli topologicznych dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów [slassop] elementów, oraz parametrów charakteryzujących strukturalne własności tych układów, koniecznych dla zrozumienia rozważań dotyczących homemorfizmu [11] i syntezy topologicznej [12] bi-grafów układów dwójników.

2. PODSTAWOWE DEFINICJE ORAZ MODELE ROZPATRYWANYCH UKŁADÓW

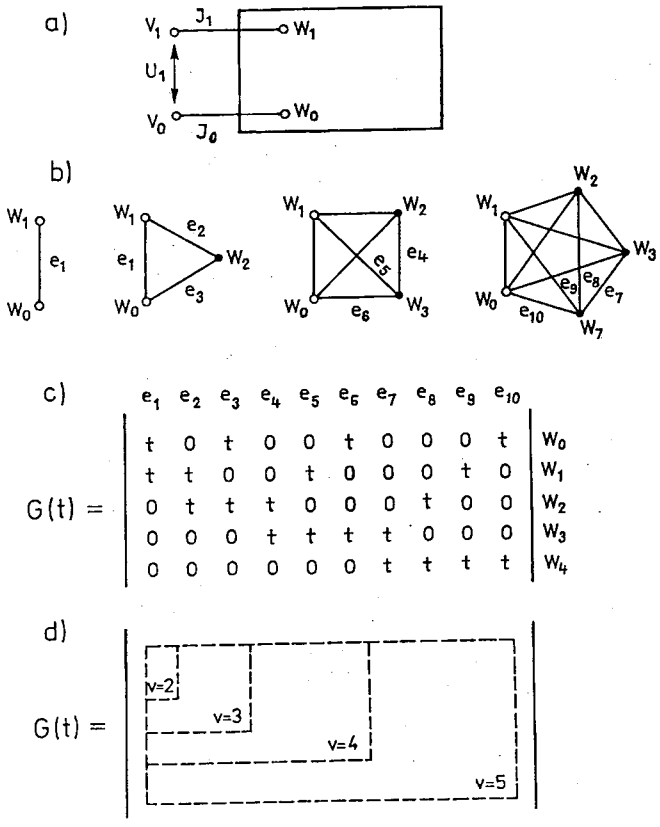
Na rysunku 1.e,f,g przedstawiono trzy topologiczne modele dwójnika składającego się z dwóch rodzajów elementów $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$ w postaci unigrafu (rys. 1.e), multigrafu (rys. 1.f), i bi-grafu (rys. 1.g).

Unigrafem układu (rys. 1.e) będziemy nazywali jego model topologiczny w postaci grafu niezorientowanego, w którym nie rozróżnia się rodzaju odwzorowywanego elementu a ponadto elementy połączone równolegle są reprezentowane przez jedną gałąź w grafie.

Na rysunku 2 przedstawiono sposób tworzenia pełnego unigrafu dwójnika w funkcji jego wierzchołków. Taki *„rozszerzający się"* w zależności od liczby wierzchołków unigraf dwójnika ma dwie podstawowe zalety:

– gałąź o danym numerze jest zawsze incydentna do tej samej pary wierzchołków, co ma istotne znaczenie w procesie ich syntezy topologicznej.

– dodając kolejne wierzchołki macierz incydencji układu ulega tylko *„rozszerzeniu"*, co ma istotne znaczenie w procesie algorytmizacji kryteriów homeomorficzności dwóch układów.



Rys. 2. Parametry układu dwójnika: a) jego model topologiczny, b) jego unigraf w funkcji liczby wierzchołków, c) jego macierz incydencji $G^v(t)$, d) prezentacja sposobu „rozszerzania się" jego macierz incydencji w funkcji liczby wierzchołków

Unigraf $G^v(t)$ danego układu o v wierzchołkach będziemy zapisywali w postaci:

$$G^v(t) = e_{lc},\ldots, e_2, e_1 \tag{1.a}$$

lub w postaci:

$$G^v(t) = p_l t,\ldots, p_2 t, p_1 t, \tag{1.b}$$

gdzie:

$$p_i = \begin{cases} 1; \text{ jeśli w układzie istnieje gałąź } e_i \\ 0; \text{ jeśli w układzie nie istnieje gałąź } e_i \end{cases}$$

$$t = \{t_1, t_2\}$$

v — liczba wierzchołków grafu.

Liczba gałęzi w pełnym unigrafie $G^v(t)$ wyraża się wzorem [2]

$$l_c = \frac{v(v-1)}{2}. \tag{2}$$

Na przykład unigraf $G^v(t)$ układu prezentowanego na rysunku 3.c ma postać:

$$G^4(t) = t, t, t, t, t, 0 \tag{3}$$

Multigrafem układu (rys. 1.f) będziemy nazywali jego model topologiczny w postaci grafu niezorientowanego, w którym każdy rodzaj elementu jest odwzorowywany przez jedną nierozróżnialną gałąź. Multigraf $G^v(tm)$ danego układu będziemy zapisywać w postaci:

$$G^v(tm) = e_{l_c}, \ldots, e_2, e_1, \tag{4.a}$$

lub w postaci:

$$G^v(tm) = tp_{l_c}, \ldots, tp_2, tp_1, \tag{4.b}$$

gdzie:

$$p_i = \begin{cases} n; \text{ jeśli w układzie istnieje } n (n \leqslant m) \text{ równoległych gałęzi } e_i \\ 0; \text{ jeśli w układzie nie istnieje gałąź } e_i \end{cases}$$

Na przykład multigraf $G^v(t2)$ układu prezentowanego na rysunku 3.c można zapisać w postaci:

$$G^4(t2) = t, t, t, t, t2, 0 \tag{5}$$

Bi-grafem układu (rys. 1.e) składającego się z $\{t_1, t_2\}$ rodzajów [slossop] elementów będziemy nazywali model topologiczny w postaci grafu niezorientowanego, w którym każdy rodzaj elementu jest odwzorowywany przez różnie oznaczoną gałąź grafu.

Jak łatwo zauważyć układ (rys. 3.d) składający się z $\{t_1, t_2\}$ rodzajów elementów można przedstawić jako sumę teoriomnogościową dwóch zbiorów elementów odwzorowanych w postaci mono-grafu $G^v(t_1)$ zbudowanego tylko z elementów typu $\{t_1\}$ i mono-grafu $G^v(t_2)$ zbudowanego tylko z elementów typu $\{t_2\}$, co można zapisać w postaci:

$$G^v(t_1.t_2) = G^v(t_1) \cup G^v(t_2), \tag{6}$$

gdzie:

$G^v(t_1.t_2)$ – bi-grafy układu o v wierzchołkach składającego się z elementów $\{t_1, t_2\}$.

$G^v(t_1)$, $G^v(t_2)$ – mono-grafy składające się odpowiednio tylko z elementów typu $\{t_1\}$ lub $\{t_2\}$.

Bi-graf $G^v(t_1, t_2) = G^v(t_1) \cup G^v(t_2)$ charakteryzujący dany układ składający się z $\{t_1, t_2\}$ rodzajów elementów będziemy zapisywać w postaci:

$$G^v(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} G^v(t_1) \\ G^v(t_2) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Na przykład prezentowany na rysunku 3 bi-graf dwójnika można zapisać w postaci:

$$G^4(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_1 & t_1 & t_1 & 0 \\ t_2 & t_2 & 0 & 0 & t_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

W procesie formułowania algebraicznych warunków homoemorfizmu grafów układu [11] oraz w procesie ich syntezy topologicznej [12] parametry je charakteryzujące będą wyrażone w postaci dendrytów *k*-drzewowych ($k = 1$ v 2 v 3). W teorii grafów [2,9] różni autorzy używają różnych nazw dla określenia tej samej wielkości, na przykład synonimem drzewa [2] jest dendryt [9], natomiast dla określenia 2-drzewa używa się również określenia dendryt 2-drzewowy [9]. W niniejszej pracy będziemy używać określenia dendryt *k*-drzewowy ($k = 1$ *v* 2 *v* 3). Dla jednoznaczności niżej zdefiniowano te pojęcia oraz zilustrowano graficznymi przykładami.

Dendryt 1-drzewowy spójnego grafu $G^v(t)$ zawierający v wierzchołków to jeden acykliczny podgraf $G^v(t)$ posiadający v--1 gałęzie i zawierający wszystkie wierchołki grafu $G^v(t)$. Dendryt 1-drzewowy unigrafu układu będziemy oznaczali $T_1{}^v(t)$.

Dendryt 2-drzewowy spójnego grafu $G^v(t)$ zawierającego v wierchołków , składa się z dwóch acyklicznych podgrafów $G^v{}_1(t)$ i $G^v(t)$ posiadających w sumie v-2 gałęzie i zawierające wszystkie wierzchołki grafu $G^v(t)$. Dendryt 2-drzewowy unigrafu układu o v wierzchołkach będziemy oznaczali $T^v{}_{ij....fd...}(t)$ lub w skrócie $T_2{}^v(t)$, gdzie wierzchołki $\{w_i, w_j\}$ znajdują się w jednej (np. $G^v{}_1(t)$ składowej grafu $G^v(t)$ a wierchołki $\{w_f,w_d\}$ w drugiej składowej (np. $G_2{}^v(t)$) grafu $G^v(t)$. Należy zwrócić uwagę, że jeden z podgrafów $G_1{}^v(t)$ lub $G_2{}^v(t)$ może składać się tylko z jednego izolowanego wierzchołka.

W tabeli 1 zamieszczonej obok dla pełnego unigrafu o $v = 4$ wierzchołkach zestawiono wszystkie dendryty *k*-drzewowe konieczne do opisu własności dwójników oraz czwórników.

3. ELEMENTY ANALIZY TOPOLOGICZNEJ UKŁADÓW SKŁADAJĄCYCH SIĘ Z $\{t_1, t_2\}$ RODZAJÓW ELEMENTÓW.

W ogólnym przypadku dany parametr charakteryzujący dwójnik lub czwórnik składający się z dwóch rodzajów [slssop] elementów można zapisać [14] w postaci funkcji wymiernej typu:

$$F_{r/p}(t_1, t_2) = \frac{H_{ka}{}^v(t_1, t_2)}{H_{kb}{}^v(t_1, t_2)}, \tag{9}$$

gdzie:

$H_{ka}{}^v(t_1, t_2)$; $H_{kb}{}^v(t_1, t_2)$ — odpowiednio sumy iloczynów admitancji elementów

Tabela 1

Dendryty k-drzewowe w pełnym unigrafie $G^4(t)$ konieczne do wyznaczania parametrów charakteryzujących dwójniki i czwórniki

Nr	$T_1^4(t)$		$T_{1,0}^4(t)$		$T_{2,3}^4(t)$		$T_{13,20}^4(t)$ $T_{12,30}^4(t)$		$T_{i,jk,0}^4(t)$	
	struktura	model topol.	struktura	model topol.	struktura	model topol.	struktura	model topol.	struktura	model topol.
1	00t0tt		00t0t0		0000tt					
2	00tt0t		00tt00		000t0t					
3	00ttt0				000tt0					
4	0t00tt		0t00t0				$T_{13,20}^4$ 0t0t00		$T_{1,3,20}^4$ 000t00	
5	0t0t0t		0t0t00							
6	0t0tt0									
7	0tt00t		0tt000		0t000t				$T_{13,20}^4$ 0t0000	
8	0ttt00				0t0t00					
9	t000tt		t000t0				t000t0 $T_{12,30}^4$		0000t0 $T_{12,30}^4$	
10	t00t0t		t00t00							
11	t00tt0								t00000 $T_{1,2,30}^4$	
12	t0t00t		t0t000		t0000t					
13	t0t0t0				t000t0					
14	tt00t0									
15	tt0t00									
16	ttt000				*tt*0000					

typu $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$ tworzących dendryty *ka*-drzewowe w liczniku i dendryty *kb*-drzewowe w mianowniku funkcji wymiernej opisującej parametry dwójnika lub czwórnika.

r – stopień licznika funkcji wymiernej.

p – stopień mianownika funkcji wymiernej.

W ogólnym przypadku $H_k^v(t_1, t_2)$ [14] można zapisać w postaci:

$$H_k^v(t_1, t_2) = \sum_{\substack{\text{wszystkie} \\ \text{dendryty} \\ k-\text{drzewowe}}} \left[\prod^{n_{ik}} (Y_{ij} \cdot t_1) \cdot \prod^{n_{2k}} (Y_{2j} \cdot t_2) \right], \tag{10}$$

gdzie:

n_{ik} – liczba elementów typu $\{t_1\}$ występujących w dendrycie k-drzewowym.

$n_{2k} = v-1-n_{ik}$ – liczba elementów typu $\{t_2\}$ występujących w dendrycie k-drzewowym.

$$n_{ik} + n_{2k} = v - k \tag{11}$$

Należy zwrócić uwagę na sposób zapisu poszczególnych iloczynów admitancji $\{Y_{1i}\ t_1\}$ i $\{Y_{2j}\ t_2\}$ w wyrażeniu (10). Zapis ten oznacza, że sumujemy wszystkie możliwe w danej strukturze układu, wariacje iloczynów admitancji elementów tworzących dendryty k-drzewowe, składające się z $(n_{ik}=v-k,\ldots 1,0)$ elementów typu $\{t_1\}$ o admitancjach $\{Y_{1i}\ t_1\}$ oraz z $n_{2k}=v-k-n_{ik}$ elementów typu $\{t_2\}$ o admitancjach $\{Y_{2j}\ t_2\}$.

Jak łatwo zauważyć wszystkie dendryty k-drzewiowe ($k=1\ v\ 2\ v\ 3$) występujące w dwójniku lub czwórniku, można podzielić na grupy zawierające tę samą liczbę n_{1k} elementów typu $\{t_1\}$ i dopełniającą liczbę $n_{2k}=v-k-n_{ik}$ elementów typu $\{t_2\}$. Wówczas wyrażenie (10) można zapisać w postaci:

$$H_k^v(t_1, t_2) = \sum_{n_{ik}=0}^{v-k} \left\{ \sum_{T^v{}_k(t_1{}^{n_{ik}}, t_2{}^{n_{2k}})} \left[\prod^{n_{ik}} (Y_{1i}\ t_1) \cdot \prod^{n_{2k}} (Y_{2j}\ t_2) \right] \right\}. \tag{12}$$

gdzie:

$T_k^v(t_1{}^{n_{ik}}, t_2{}^{n_{2k}})$ — dendryt k-drzewowy składający się z n_{ik} $(n_{ik}=v-k,\ v-1,\ldots,\ 1,\ 0)$ elementów typu $\{t_1\}$ oraz n_{2k} $(n_{2k}=v-k-n_{ik}$ elementów typu $\{t_2\}$.

W ogólnym przypadku dany parametr charakteryzujący układ, można zapisać w postaci:

$$F_{r/p}(t_1, t_2) = \frac{\sum_{n_{ika}=0}^{r} A_{n_{ika}, n_{2ka}} \cdot t_1{}^{n_{ika}} \cdot t_2{}^{n_{2ka}}}{\sum_{n_{ikb}=0}^{p} B_{n_{ikb}, n_{2kb}} \cdot t_1{}^{n_{ikb}} \cdot t_2{}^{n_{2kb}}} \tag{13}$$

gdzie:

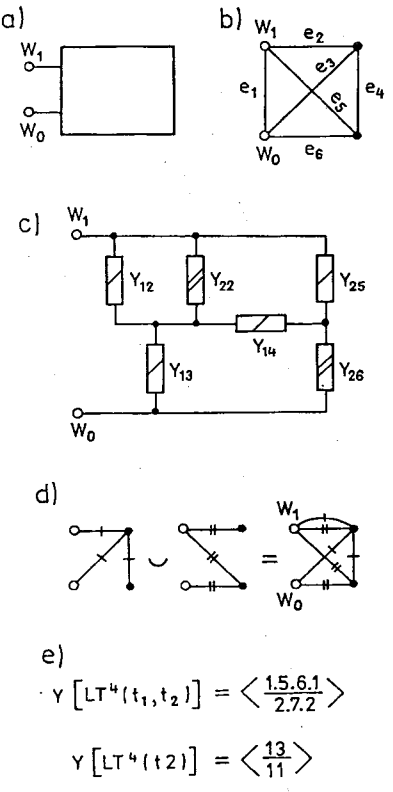
$$A_{n_{ika}, n_{2ka}} = \sum_{T_k^v(t_1{}^{n_{ika}, t_2{}^{n_{2ka}})} \left[\prod^{n_{ika}} (Y_{1i}) \cdot \prod^{n_{2ka}} (Y_2) \right] \tag{14}$$

$$B_{n_{ikb}, n_{2kb}} = \sum_{T_k^v(t_1{}^{n_{ikb}}, t_2{}^{n_{2kb}})} \left[\prod^{n_{ikb}} (Y_{1i}) \cdot \prod^{n_{2kb}} (Y_{2j}) \right] \tag{15}$$

Należy zwrócić uwagę, że występujące we wzorze (13) wyrazy $t_i^{n_{ik}}$ są wielkościami bezwymiarowymi i sygnalizują nam że w danym iloczynie admitancji występuje n_{ik} elementów rodzaju $\{t_i\}$.

Na rysunku 3 pokazano przykład dwójnika składającego się z dwóch rodzajów elementów. W tabeli na tym rysunku zestawiono wszystkie dendryty 1- i 2-drzewowe, składające się z elementów typu $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$ rozpatrywanego dwójnika. Istnienie w dendrycie k-drzewowym elementu typu $\{t_1\}$ zaznaczono literą t_1, natomiast występowanie elementu typu $\{t_2\}$ — literą t_2.

Dla prezentowanego na rysunku 3 dwójnika w ogólnym przypadku admitancję wejściową można zapisać w postaci:



struktura / dendryty	$e_6 e_5 e_4 e_3 e_2 e_1$	$LT^4(t_1,t_2)$	$LT^4(t2)$
$T_1^4(t_1^3,t_2^0)$	0 0 t_1 t_1 t_1 0	1	13
$T_1^4(t_1^2,t_2^1)$	0 t_2 0 t_1 t_1 0 t_2 0 0 t_1 t_1 0 t_2 0 t_1 0 t_1 0 0 0 t_1 t_1 t_2 0 0 t_2 t_1 t_1 0 0	5	
$T_1^4(t_1^1,t_2^2)$	t_2 t_2 0 0 t_1 0 0 t_2 0 t_1 t_2 0 t_1 0 0 t_1 t_2 0 t_2 t_2 0 t_1 0 0 t_2 0 t_1 0 t_2 0 t_2 t_1 t_2 0 0 0	6	
$T_1^4(t_1^0,t_2^3)$	t_2 t_2 0 0 t_2 0	1	
$T_{1,0}^4(t_1^2,t_2^0)$	0 0 t_1 0 t_1 0 0 0 t_1 t_1 0 0	2	11
$T_{1,0}^4(t_1^1,t_2^1)$	0 t_2 0 0 t_1 0 t_2 0 0 0 t_1 0 0 t_2 0 t_1 0 0 t_2 0 0 t_1 0 0 0 0 t_1 0 t_2 0 0 t_1 t_2 0 0 0 t_2 0 t_1 0 0 0	7	
$T_{1,0}^4(t_1^0,t_2^2)$	0 t_2 0 0 t_2 0 t_2 0 0 0 t_2 0	2	

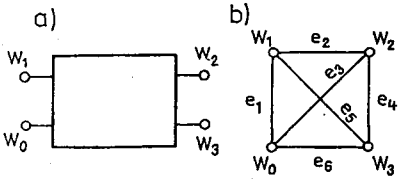
Rys. 3. Przykład układu dwójnika: a) jego model topologiczny, b) ogólna numeracja gałęzi w jego pełnym unigrafie, c) schemat układu, d) jego bi-graf $T_i^4(t_i) \cup T_i^4(t_2) = G^4(t_1, t_2)$, e) admitancje strukturalne jego bi-grafu i multigrafu, tabela – dendryty k-drzewowe konieczne do określenia jego parametrów

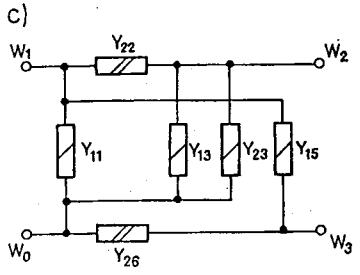
$$Y_{3/2}(t_1, t_2) = \frac{A_{30} \cdot t_1^3 t_2^0 + A_{21} \cdot t_1^2 \cdot t_2^1 + A_{12} \cdot t_1^1 \cdot t^2{}_2 + A_{03} \cdot t_1^0 \cdot t_2^3}{B_{20} \cdot t_1^2 \cdot t_2^0 + B_{11} \cdot t_1^1 \cdot t_2^1 + B_{02} \cdot t_1^0 \cdot t_2^2}, \quad (16)$$

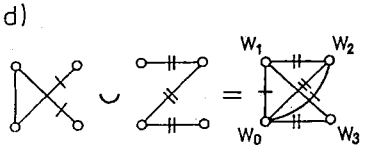
gdzie:

$$A_{30} = Y_{14} \cdot Y_{13} \cdot Y_{12}$$
$$A_{21} = Y_{13} \cdot Y_{12} \cdot Y_{25} + Y_{13} \cdot Y_{12} \cdot Y_{26} + Y_{14} \cdot Y_{12} \cdot Y_{26} + Y_{14} \cdot Y_{13} \cdot Y_{22} + Y_{14} \cdot Y_{13} \cdot Y_{25}$$
$$A_{12} = Y_{12} \cdot Y_{26} \cdot Y_{25} + Y_{13} \cdot Y_{25} \cdot Y_{22} + Y_{13} \cdot Y_{26} \cdot Y_{22} + Y_{13} \cdot Y_{26} \cdot Y_{25} + Y_{14} \cdot Y_{26} \cdot Y_{22} + Y_{14} \cdot Y_{26} \cdot Y_{25}$$
$$A_{03} = Y_{26} \cdot Y_{25} \cdot Y_{22}$$
$$B_{20} = Y_{14} \cdot Y_{12} + Y_{14} \cdot Y_{13}$$
$$B_{11} = Y_{12} \cdot Y_{25} + Y_{12} \cdot Y_{26} + Y_{13} \cdot Y_{25} + Y_{13} \cdot Y_{26} + Y_{14} \cdot Y_{22} + Y_{14} \cdot Y_{25} + Y_{14} \cdot Y_{26}$$
$$B_{02} = Y_{25} \cdot Y_{22} + Y_{22} \cdot Y_{26}$$

Taki sposób przedstawienia poszczególnych parametrów dwójnika, ma tę zaletę że uwypukla fakt, że liczniki i mianownik funkcji wymiernej (wzór 13) składają się z sum iloczynów odpowiednio n_{1k} elementów typu $\{t_1\}$ o admitancjach $\{Y_{1i}\}$ i n_{2k} elementów typu $\{t_2\}$ o admitancjach $\{Y_{2j}\}$, co będzie miało istotne znaczenie dla







e)

$$Z_{11}[LT^4(t_1t_2)] = \left\langle \frac{1.3.2}{1.5.6.1} \right\rangle$$

$$Z_{22}[LT^4(t_1t_2)] = \left\langle \frac{3.6.2}{1.5.6.1} \right\rangle$$

$$Z_{\substack{12\\21}}[LT^4(t_1t_2)] = \left\langle \frac{0.0.1-1.1.0}{1.5.6.1} \right\rangle$$

$$Y_{11}[LT^4(t_1t_2)] = \left\langle \frac{3.6.2}{3.2} \right\rangle$$

$$Y_{22}[LT^4(t_1t_2)] = \left\langle \frac{1.3.2}{2.3} \right\rangle$$

$$Y_{\substack{12\\21}}[LT^4(t_1t_2)] = \left\langle \frac{1.1.0-0.0.1}{2.3} \right\rangle$$

struktura / dendryty	$e_6e_5e_4e_3e_2e_1$ $0\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ t_1$ $t_2\ 0\ 0\ t_2\ t_2\ 0$	$LT^4(t_1,t_2)$	$LT^4(t2)$
$T_1^4(t_1^3,t_2^0)$	$0\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ t_1$	1	13
$T_1^4(t_1^2,t_2^1)$	$t_2\ 0\ 0\ t_1\ 0\ t_1$ $0\ t_1\ 0\ 0\ t_2\ t_1$ $0\ t_1\ 0\ t_2\ 0\ t_1$ $0\ t_1\ 0\ t_1\ t_2\ 0$ $t_2\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ 0$	5	
$T_1^4(t_1^1,t_2^2)$	$t_2\ 0\ 0\ 0\ t_2\ t_1$ $t_2\ 0\ 0\ t_2\ 0\ t_1$ $t_2\ 0\ 0\ t_1\ t_2\ 0$ $0\ t_1\ 0\ t_2\ t_2\ 0$ $t_2\ t_1\ 0\ 0\ t_2\ 0$ $t_2\ t_1\ 0\ t_2\ 0\ 0$	6	
$T_1^4(t_1^0,t_2^3)$	$t_2\ 0\ 0\ t_2\ t_2\ 0$	1	
$T_{1,0}^4(t_1^2,t_2^0)$	$0\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ 0$	1	6
$T_{1,0}^4(t_1^1,t_2^1)$	$0\ t_1\ 0\ 0\ t_2\ 0$ $0\ t_1\ 0\ t_2\ 0\ 0$ $t_2\ 0\ 0\ t_1\ 0\ 0$	3	
$T_{1,0}^4(t_1^0,t_2^2)$	$t_2\ 0\ 0\ 0\ t_2\ 0$ $t_2\ 0\ 0\ t_2\ 0\ 0$	2	
$T_{2,3}^4(t_1^2,t_2^0)$	$0\ 0\ 0\ t_1\ 0\ t_1$ $0\ t_1\ 0\ 0\ 0\ t_1$ $0\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ 0$	3	11
$T_{2,3}^4(t_1^1,t_2^1)$	$0\ 0\ 0\ 0\ t_2\ t_1$ $0\ 0\ 0\ t_2\ 0\ t_1$ $t_2\ 0\ 0\ 0\ 0\ t_1$ $0\ 0\ 0\ t_1\ t_2\ 0$ $0\ t_1\ 0\ 0\ t_2\ 0$ $0\ t_1\ 0\ t_2\ 0\ 0$ $t_2\ t_1\ 0\ 0\ 0\ 0$	6	
$T_{2,3}^4(t_1^0,t_2^2)$	$0\ 0\ 0\ t_2\ 0\ t_2$ $t_2\ 0\ 0\ 0\ t_2\ 0$	2	
$T_{12,30}^4(t_1^2,t_2^0)$		0	1
$T\quad(t_1^1,t_2^1)$		0	
$T\quad(t_1^0,t_2^2)$	$t_2\ 0\ 0\ 0\ t_2\ 0$	1	
$T\quad(t_1^2,t_2^0)$	$0\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ 0$	1	2
$T\quad(t_1^1,t_2^1)$	$0\ t_1\ 0\ t_2\ 0\ 0$	1	
$T_{13,20}^4(t_1^0,t_2^2)$		0	
$T_3^4(t_4^1,t_2^0)$	$0\ 0\ 0\ t_1\ 0\ 0$ $0\ t_1\ 0\ 0\ 0\ 0$	2	5
$T_3^4(t_2^0,t_2^1)$	$0\ 0\ 0\ 0\ t_2\ 0$ $0\ 0\ 0\ t_2\ 0\ 0$ $t_2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$	3	

Rys. 4. Przykład układu czwórnika: a) jego model topologiczny, b) ogólna numeracja gałęzi w jego pełnym unigrafie, c) schemat układu, d) jego bi-graf $T_i^4(t_1) \cup T_i^4(t_2) = G^4(t_1, t_2)$, e) immitancje strukturalne jego bi-grafu i multigrafu, tabela — dendryty *k*-drzewowe konieczne do określenia jego parametrów

określenia warunków homeomorfizmu bi-grafów układów. Przykład układu czwórnika składającego się z dwóch rodzajów [slssop] elementów pokazano na rysunku 4.

4. FUNKCJE STRUKTURALNE BI-GRAFÓW MULTIGRAFÓW I UNIGRAFÓW UKŁADÓW

Dla określenia algebraicznych kryteriów homomorfizmu dwóch dowolnych bi-grafów dwójników bądź czwórników [11], oraz w procesie syntezy topologicznej ich struktur kanonicznych [12] istnieje konieczność wprowadzenia pewnych parametrów charakteryzujących strukturalne (topologiczne) własności poszczególnych modeli (unigrafów, multigrafów i bi-grafów) rozpatrywanych układów.

We wzorze 12 wyrażenie w nawiasach {} oznacza sumę wszystkich iloczynów admitancji elementów tworzących dany dendryt k-drzewowy $T_k^v(t_1^{n_{1k}}, t_2^{n_{2k}})$ składający się z n_{1k} elementów typu $\{t_1\}$ oraz
$n_{2k} = v-k-n_{ik}$ typu $\{t_2\}$.

Jeśliby każdy element dwójnika lub czwórnika był jednoomowym opornikiem to wyrażenie w nawiasach { } ze wzoru 12 byłoby równe liczbie istniejących w danym układzie dendrytów k-drzewowych składających się z n_{ik} elementów typu $\{t_i\}$ i n_{2k} elementów typu $\{t_2\}$ co można zapisać w postaci:

$$\mathrm{LT}_k^v(t_1^{n_{ik}}, t_2^{n_{2k}}) = \sum_{T_k^v(t_1^{n_{ik}}, t_2^{n_{2k}})} \left[\prod^{n_{ik}} (t_1) \cdot \prod^{n_{2k}} (t_2) \right], \tag{17}$$

gdzie:

$\mathrm{LT}_k^v(t_1^{n_{ik}}, t_2^{n_{2k}})$ – liczba dendrytów k-drzewowych składających się z n_{ik} elementów typu $\{t_1\}$ i $n_{2k} = v-k-n_{ik}$ elementów typu $\{t_2\}$, istniejących w bi-grafie układu zawierającego v wierzchołków.

Jak wiadomo w procesie syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów układów [12], nie interesują nas wartości admitancji $\{Y_{\alpha\beta} t_\alpha\}$ (gdzie: α – numer rodzaju elementu, β – numer gałęzi unigrafu układu) poszczególnych elementów tworzących dany układ dwójnika lub czwórnika a tylko ich rodzaj $\{t_\alpha\}$. Niżej zdefiniowano pewne funkcje strukturalne charakteryzujące własności poszczególnych modeli (bi-grafów, multigrafów i unigrafów) dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów $\{t_1, t_2\}$, których parametry można opisać funkcją wymierną (wzór 9).

Definicja 1.

Funkcją strukturalną bi-grafu $\mathrm{F}[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2)]$ charakteryzującą dany parametr $\mathrm{F}_{r/p}(t_1, t_2)$ (w skrócie $\mathrm{F}(t_1, t_2)$ układu składającego się z dwóch rodzajów elementów $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$ będziemy nazywali dwa zbiory zapisane w postaci ułamka, którego licznik zawiera uporządkowany (względem ilości elementów t_i^{ika} od $n_{ika} = v-ka$ do $n_{ika} = 0$)

zbiór liczb dendrytów *ka*-drzewowych $<LT_{ka}^{v}(t_1^{ika}, t_2^{2ka})>$ składających się z n_{ika} elementów typu $\{t_1\}$ i $n_{2ka}=v-ka-n_{ika}$ elementów typu $\{t_2\}$, a mianownik zawiera uporządkowany (względem ilości elementów t_2^{2ka} od $n_{ikb}=v-kb$ do $n_{ikb}=0$) zbiór dendrytów *kb*-drzewowych $<LT_{kb}^{v}(t_1^{nikb}, t_2^{n2kb})>$ składających się z n_{ikb} elementów typu (t_i) i $n_{2kb}=v-kb-n_{ikb}$ elementów typu $\{t_2\}$.

Funkcję strukturalną $F[LT^v(t_1, t_2)]$ bi-grafu charakteryzującą dany parametr $F(t_1, t_2)$ układu zapisujemy w postaci:

$$F[LT^v(t_1,t_2)] = \frac{<LT_{ka}^{v}(t_1^{n_{1ka}},t_2^{n_{2ka}})> \Big|_{n_{ika}=0}^{n_{ika}=v\text{-ka}}}{<LT_{kb}^{v}(t_1^{n_{1kb}},t_2^{n_{2kb}})> \Big|_{n_{ikb}=0}^{n_{ikb}=v\text{-kb}}} \tag{18}$$

gdzie w ogólnym przypadku:

$<LT_k^v(t_1^{nik}, t_2^{n2k})> \Big|_{n_{1k}=0}^{n_{1k}=v-k}$ – uporządkowany zbiór (od $n_{1k}=v-k$ do $n_{ik}=0$) liczb dendrytów *k*-drzewowych składających się z n_{ik} elementów typu $\{t_1\}$ i $n_{2k}=v-k-n_{ik}$ elementów typu $\{t_2\}$.

I tak na przykład funkcja strukturalna charakteryzująca impedancję wejściową czwórnika (rys. 4) ma postać:

$$Z_{11}[LT^4(t_1, t_2)] = <\frac{1,\ 3,\ 2}{1,\ 5,\ 6,\ 1}> \tag{19}$$

co oznacza że licznik funkcji $Z_{11}(t_1, t_2)$ zawiera sumę składników w postaci 1-go iloczynu admitancji elementów tworzących dendryt 2-drzewowy $T_{1,0}^{4}(t_1^{2}, t_2^{0})$ składający się z $n_{12}=4-2=2$ elementów typu $\{t_1\}$ i $n_{22}=4-2-2=0$ elementów typu $\{t_2\}$, 3-ch iloczynów admitancji elementów tworzących dendryt 2-drzewowy $T_{1.0}(t_1^{1}, t_2^{1})$ składających się z 1-go elementu typu $\{t_1\}$ i pierwszego elementu typu $\{t_2\}$, itd. Natomiast mianownik funkcji $Z_{11}(t_1, t_2)$ zawiera sumę składników w postaci 1-go iloczynu admitancji elementów tworzących dendryt 1-drzewowy $T_1^{4}(t_1^{3}, t_2^{0})$ składający się z $n_{11}=4-1=3$ elementów typu $\{t_1\}$ i $n_{21}=4-1-3=0$ elementów typu $\{t_2\}$, 5 iloczynów admitancji elementów tworzących dendryt 1-drzewowy $T_1^{4}(t_1^{2}, t_2^{1})$ składający się z 2-ch elementów typu $\{t_1\}$ i pierwszego elementu typu $\{t_2\}$, itd.

Należy zwrócić uwagę że, jeśli w rozpatrywanym układzie nie występują dendryty *k*-drzewowe składające się z n_{ik} elementów typu $\{t_1\}$ i oczywiście $n_{2k}=v-k-n_{ik}$ elementów typu $\{t_2\}$, to w tym miejscu uporządkowanego zbioru $<LT_k^v(t_1^{nik}, t_2^{n2k})>$ wpisujemy zero. Na przykład w czwórniku (rys. 4) brak iloczynu admitancji tworzących dendryt 2-drzewowy $T_{13,20}^{4}(t_1^{0}, t_2^{2})$ dlatego też uporządkowany zbiór $<LT_{13,20}^{4}(t_1, t_2)>$ ma postać $<1, 1, 0>$.

Oprócz zdefiniowanej wyżej funkcji strukturalnej charakteryzującej bi-grafu danego układu, istotną rolę szczególnie w procesie syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów układów odgrywają funkcje strukturalne charakteryzujące multigrafy i unigrafy rozpatrywanych układów.

Definicja 2.

Funkcją strukturalną multigrafu $F[LT^v(t2)]$ i unigrafu $F[LT^v(t)]$ układu nazywamy dwójkę uporządkowaną w postaci ułamka, którego licznik zawiera całkowitą liczbę dendrytów *ka*-drzewowych a mianownik całkowitą liczbę dendrytów *kb*-drzewowych występujących we wzorach określających funkcję strukturalną $F[LT^v(t_1, t_2)]$ rozpatrywanego układu.

Funkcję strukturalną charakteryzującą dany parametr multigrafu układu składającego się z dwóch typów elementów zapisujemy w postaci:

$$F[LT^v(t2)] = <\frac{LT_{ka}{}^v(t2)}{LT_{kb}{}^v(t2)}>, \tag{20}$$

gdzie cyfra 2 oznacza liczbę rodzajów elementów w układzie.

Z powyższej definicji oraz definicji multigrafu wynika, że w ogólnym przypadku można zapisać:

$$LT_k{}^v(t2) = \sum_{n_{ik}=v-k}^{0} [LT_k{}^v(t_1{}^{n_{ik}}, t_2{}^{n_{2k}})]. \tag{21}$$

Liczby $LT_k{}^v(t2)$ charakteryzujące multigrafy układów prezentowanych na rysunkach 3 i 4 zestawiono w ostatnich kolumnach tabel na tych rysunkach.

Sens fizyczny funkcji strukturalnej multigrafu zilustrujemy na przykładzie układu z rys. 4. I tak na przykład zapis:

$$Z_{11}[LT(t2)] = <\frac{6}{13}> \tag{22}$$

oznacza że funkcja wymierna określająca impedancję wejściową czwórnika posiada w liczniku 6 składników sumy w postaci iloczynów admitancji elementów tworzących dendryty 2-drzewowe $T_{1.0}{}^4(t2)$ a mianownik 13 składników sumy w postaci iloczynów admitancji elementów tworzących dendryty 1-drzewowe $T_1{}^4(t2)$. Funkcję strukturalną unigrafu układu zapisujemy w postaci:

$$F[LT^v(t)] = <\frac{LT_{ka}{}^v(t)}{LT_{kb}{}^v(t)}>. \tag{23}$$

Należy zwrócić uwagę, że dendryt *k*-drzewowy można również przedstawić jako ciąg różnowartościowy składający się z $v-k$ elementów ze zbioru gałęzi $E\{e_i\}_t$ tworzących dany unigraf $G^v(t)$.

Z definicji dendrytów *k*-drzewowych wynika, że w tworzeniu danego typu dendrytów *k*-drzewowego nie uczestniczy $(k-1)$ gałęzi unigrafu. Zilustrujemy to na przykładzie dendrytów *k*-drzewowych pełnego unigrafu $G^4\{t\}$.

Jak łatwo zauważyć (tabela 1) dendryty 2-drzewowe na przykład $T_{i,0}{}^4(t)$ tworzy się z tych dendrytów 1-drzewowych, które zawierają element na pozycji e_1 (incydentny do wierzchołków $\{w_1, w_0\}$). Na przykład dendryt 1-drzewowy

$$T_i^4(t) = \begin{matrix} e_6, & e_5, & e_4, & e_3, & e_2, & e_1 \\ 0, & 0, & t, & 0, & t, & t \end{matrix} \tag{24}$$

jest podstawą utworzenia dendrytu 2-drzewowego $T_{i,0}{}^4(t)$

$$T_{i,0}{}^4(t) = \begin{matrix} e_6, & e_5, & e_4, & e_3, & e_2, & e_1 \\ 0, & 0, & t, & 0, & t, & 0 \end{matrix}. \tag{25}$$

Ten sam dendryt 1-drzewowy (wzór 24) jest również podstawą do utworzenia dendrytu 3-drzewowego $T_{1,3,20}{}^4(t)$, ponieważ zgodnie z definicją dendryty 3-drzewowe $T_{1,3,20}{}^4(t)$ tworzy się z tych dendrytów 1-drzewowych, które zawierają elementy na pozycji e_1 (incydentnego do wierzchołków $\{w_0, w_1\}$) oraz elementu na pozycji e_4 (incydentnego do wierzchołków $\{w_2, w_3\}$).

$$T_{1,3,20}{}^4(t) = \begin{matrix} e_6, & e_5, & e_4, & e_3, & e_2, & e_1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & t, & 0 \end{matrix}. \tag{26}$$

Ten sposób tworzenia dendrytów 3-drzewowych ilustruje tabela. Na przykład wszystkie dendryty 2-drzewowe typu $T_{i,0}{}^v(t)$ nie zawierają $(k-1=2-1=1)$ jednej gałęzi e_1 (incydentnej do wierzchołków $\{w_0, w_i\}$), natomiast wszystkie dendryty 3-drzewowe typu $T_{1,3,20}{}^v(t)$ nie zawierają $(k-1=3-1=2)$ dwóch gałęzi e_1 i e_4 (incydentnych odpowiednio do wierzchołków $\{w_0, w_i\}$ oraz $\{w_3, w_2\}$). Również unigraf można przedstawić jako l elementowy ciąg gałęzi e_i ze zbioru gałęzi $E\{e_i\}_l$ tworzących dany unigraf.

Z powyższych rozważań wynika, że dany typ dendrytu k-drzewowego można utworzyć jako $v-k$ elementową wariację bez powtórzeń z $l-(k-1)$ elementowego zbioru gałęzi $E\{e_i\}_l$ tworzących unigraf $G^v(t)$ nie zawierającą tylko permutacji jego $(k-1)$ gałęzi $\{e_j\}$ (incydentnych do odpowiednich wiechołków), co w ogólnym przypadku można również zapisać w postaci:

$$T^v_{i_3 j f_3 0}(t) = T_k{}^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}], \tag{27}$$

gdzie:

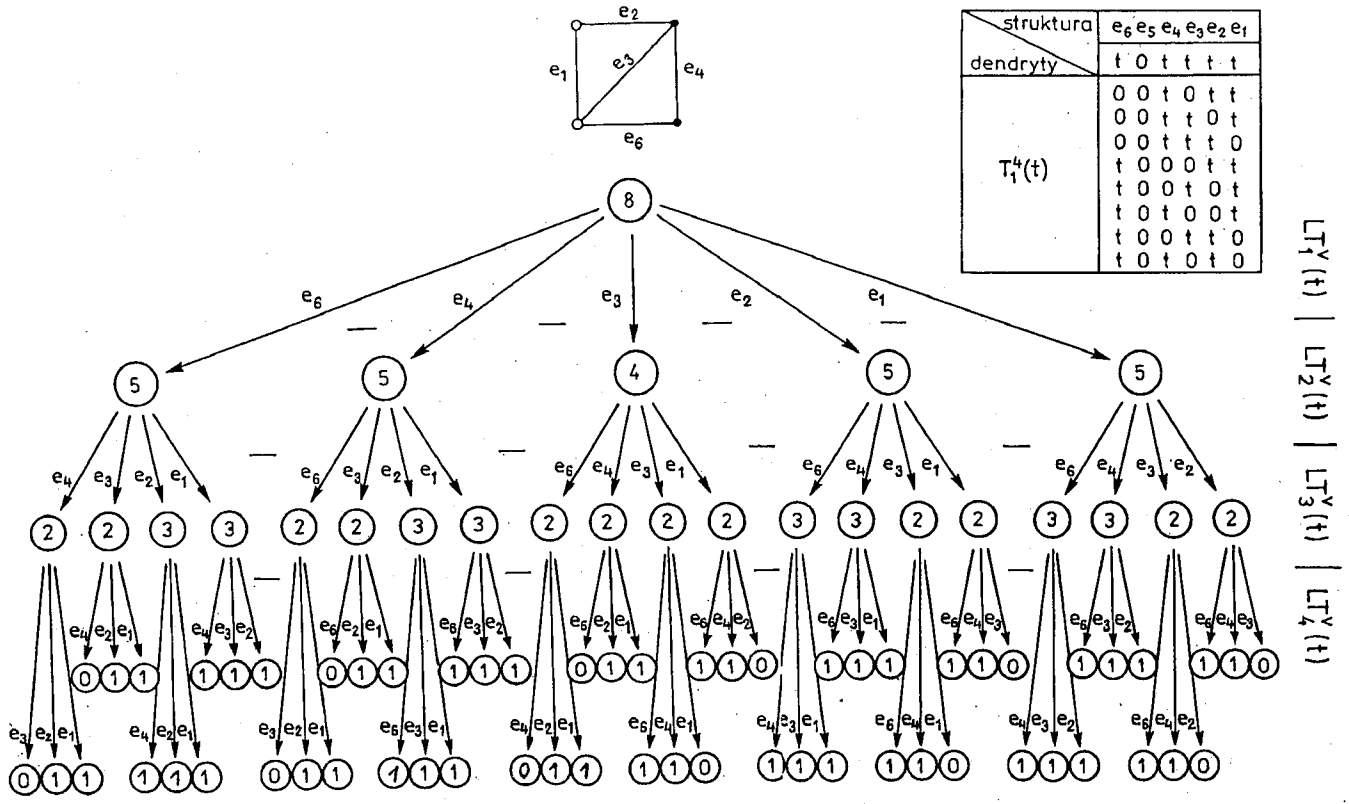
$T_k{}^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]$ — dendryty k-drzewowe utworzone w zbiorze elementów $E\{e_i\}_l$ tworzących unigraf, jako $v-k$ elementowe wariacje bez powtórzeń z jego $l-(k-1)$ gałęzi $\{e_i\}$ nie zawierające tylko permutacji jego $(k-1)$ gałęzi $\{e_j\}$ które nie uczestniczą w tworzeniu danego typu dendrytu k-drzewowego.

Korzystając z powyższej zależności, na przykład dendryty k-drzewowe $T_{1,0}{}^v(t)$ i $T_{1,3,20}{}^v(t)$ można w ogólnym przypadku zapisać w postaci:

$$T_{1,0}{}^v(t) = T_2{}^v[\{e_i\}_{l-1} - \{e_1\}_1] \tag{28}$$

$$T_{1,3,20}{}^v(t) = T_3{}^v[\{e_i\}_{l-2} - \{e_1, e_4\}_2]. \tag{29}$$

Dla stwierdzenia homeomorfizmu dwóch unigrafów $G^v(t)$ istotnym parametrem charakteryzującym ich własności, są zbiory liczb dendrytów k-drzewowych $\{LT_k{}^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}$. Zbiór liczb dendrytów k-drzewowych $\{LT_k{}^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}$ unigrafu $G^v(t)$ zawiera poszczególne liczby (ilości) dendrytów k-drzewowych $LT_k{}^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]$. Sposób wyznaczania poszczególnych liczb



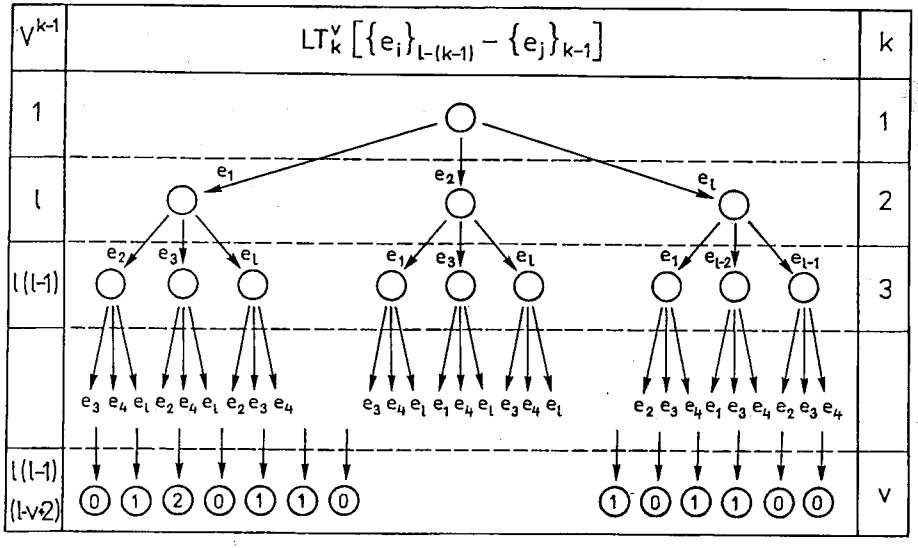
Rys. 5. Przykład „drzewa z korzeniem" liczb dendrytów k-drzewowych $LT_k^v(t) = LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]$ utworzonego z elementów $\{e_6, e_4, e_3, e_2, e_1\}$ unigrafu $G^4(t)$, jako $v-k$ elelmentowe wariacje bez powtórzeń jego $l-(k-1)$ elementów $\{e_i\}$, nie zawierających tylko permutacji jego $(k-1)$ elementów $\{e_j\}$; tabela — dendryty 1-drzewowe unigrafu $G^4(t)$ konieczne do wyznaczania poszczególnych liczb dendrytów k-drzewowych $LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]$

(ilości dendrytów k-drzewowych $LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]$ oraz tworzenia zbiorów liczb dendrytów k-drzewowych $\{LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}$ zilustrujemy na przykładzie unigrafu pokazanego na rys. 5.

I tak na przykład w prezentowanym unigrafie istnieje 5 dendrytów 1-drzewowych zawierających element e_1, a więc istnieje $LT_2^v[\{e_i\}_{l-1} - \{e_1\}_1 = 5$ dendrytów 2-drzewowych $T_{1,0}^v(t)$. Istnieje również 5 dendrytów 1-drzewowych zawierających element e_2, stąd $LT_2^v[\{e_i\}_{l-1} - \{e_2\}_1] = 5$.

Postępując analogicznie dla pozostałych elementów $\{e_j\}$ istniejących w unigrafie $G^4(t)$, zbiór liczb dendrytów 2-drzewowych charakteryzujących dany unigraf można zapisać w postaci $\{LT_2^4[\{e_i\}_{l-1} - \{e_j\}_1]\} = \{5,5,4,5,5\}$.

Poszczególne wartości elementów zbioru liczb dendrytów 3-drzewowych $\{LT_3^v[\{e_i\}_{l-2} - \{e_j\}_2]\}$ wyznacza się analogicznie. I tak na przykład w prezentowanym unigrafie (rys. 5) istnieją dwa dendryty 1-drzewowe, które zawierają elementy e_1 i e_4. Stąd $LT_3^4[\{e_i\}_{l-2} - \{e_1, e_4\}_2] = 2$ wyznaczają pozostałe liczby dendrytów 3-drzewowych $LT_3^v[\{e_i\}_{l-2} - \{e_1, e_j\}_2]$ nie zawierające poszczególnych permutacji elementów $\{e_1, e_j\}_2$ rozpatrywanego unigrafu $G^4(t)$. Zbiór liczb dendrytów 3-drzewowych charakteryzujący dany unigraf można zapisać w postaci $\{LT_3^4[\{e_i\}_{l-2} - \{e_1, e_{j2}]\} = \{2,2,3,3\}$.



Rys. 6. Ogólny przykład sposobu tworzenia „drzewa z korzeniem" liczb dendrytów k-drzewowych $LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]$

Na rysunku 6 przedstawiono ogólny schemat tworzenia poszczególnych zbiorów liczb dendrytów k-drzewowych $\{LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}$ charakteryzujący dany unigraf. Należy zwrócić uwagę, że powyższe rysunki ilustrują nam klasyczny problem kombinatoryki [6], „Liczba $\{v-k\}$ wyrazowych wariancji bez powtórzeń z $\{1-(k-1)\}$ elementowego zbioru elementów".

Jak łatwo zauważyć poszczególne ciągi elementów $\{e_i\}$ od *„kółka"* oznaczającego liczbę dendrytów k-drzewowych do poszczególnych *„kółek"* w ostatniej linii, to nic

innego jak wszystkie różnowartościowe $\{v-k\}$ elementowe ciągi elementów ze zbioru $\{1-(k-1)\}$. Liczba $\{v-k\}$ wyrazowych wariancji bez powtórzeń z $\{1-(k-1)\}$ elementowego zbioru elementów, jest oczywiście większa od liczby dendrytów k-drzewowych występujących w danym unigrafie. Należy zwrócić uwagę że "1" w ostatnim wierszu na rysunkach 5 i 6 oznacza, że dany ciąg $\{v-k\}$ elementów tworzy dendryt k-drzewowy, natomiast "0" oznacza, że elementy te nie tworzą dendrytu k-drzewowego.

Korzystając z kombinatoryki [6] można zapisać:

$$LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}] = \frac{L(1)}{(v-k)!} \tag{30}$$

gdzie:

L(1) – liczba "1" w ostatnim wierszu na rysunkach 5 i 6.

Powyższa zależność wynika z faktu, że kolejność elementów w procesie tworzenia dendrytów k-drzewowych w unigrafie nie ma znaczenia.

Należy zwrócić uwagę, że „cząstkowe" korzenie drzew dla każdej grupy dendrytów k-drzewowych leżą na jednym i tym samym „poziomie" (rys. 5 i 6). Liczba cząstkowych korzeni drzew jest funkcją liczby gałęzi l rozpatrywanego unigrafu i parametru k określającego stopień dendrytu k-drzewowego. I tak mamy jeden korzeń dendrytu 1-drzewowego $T_1^v[\{e_i\}_j - \{0\}_0]$, l korzeni drzew dla dendrytów 2-drzewowych $T_2^v[\{e_i\}_{l-1} - \{e_j\}_1]$ itd. W ogólnym przypadku dla dendrytu k-drzewowego $T_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]$ liczbę cząstkowych korzeni można policzyć ze wzoru:

$$V_l^{k-1} = l \cdot (l-1) \cdot \ldots \cdot (l-(k-1)). \tag{31}$$

PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono podstawowe definicje i modele topologiczne układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów [slssop] elementów oraz parametry charakteryzujące strukturalne własności rozpatrywanych układów.

Przedstawiony sformalizowany zapis poszczególnych parametrów charakteryzujących strukturalne własności rozpatrywanych układów, będzie podstawą do sformułowania algebraicznych kryteriów homeomorfizmu (strukturalnej równoważności) tych układów [11] oraz wykorzystany w procesie syntezy topologicznej struktur kanonicznych dwójników [12].

BIBLIOGRAFIA

1. S. Bolkowski: *Elektrotechnika teoretyczna – teoria obwodów elektrycznych.* Warszawa: WNT, 1982
2. N. Deo: *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce.* Warszawa: PWN, 1980

3. C. F. K u r t h, G. S. M o s c h y t z: *Two-part analysis of switched capacitors networks using four-port equivalent circuits in the z-domain.* IEEE. Trans. Circuits and Systems, 1979, vol. CAS–26, pp. 166–180
4. K. R. L a k e r: *Equivalent circuits for the analysis and synthesis switched-capacitor network.* Bell Syst. Tech. J. 1979, pp. 729–769
5. W. L i p s k i: *Kombinatoryka dla programistów.* Warszawa: WNT, 1982
6. N. R. M a l i k, G. L. J a c k s o n, Y. S. K i m: *Theory and application of resistor, linear controlled resisitor, linear controlled conductor networks.* IEEE. Trans. Circuits and Systems, 1976, vol. CAS–23, pp. 222–228
7. K. M i k o ł a j u k, Z. T r z a s k a: *Elektronika teoretyczna – analiza i synteza elektrycznych obwodów liniowych.* Warszawa: PWN, 1984
8. J. J. M u l a w k a: *Układy mikroelektroniczne z przełączanymi pojemnościami.* Warszawa: WKiŁ, 1987
9. M. N. S. S w a m y, K. T h u l a s i r m a n: *Graphs, networks and algorithms.* New York: Wiley – Interscince, 1981
10. *Wremia – impulsyjne wycislitielnyje ustrojstwa.* Pod red. W. B. Smołowa i E. P. Ugriumowa, Radio i swiaż, Moskwa, 1983
11. Z. W r ó b e l: *Homeomorfizm grafów układów dwójników i czwórników zbudowanych z dwóch rodzajów elementów.* Kwart. El. i Tel., 1991, 37, z. 1
12. Z. W r ó b e l: *Synteza topologiczna struktur kanonicznych bi-grafów układów dwójników.* Kwart. El. i Tel. 1991, 37, z. 1
13. Z. W r ó b e l, I. W. G i e r a s i m o w: *Układy dwójników składające się z dwóch rodzajów elementów jako funkcjonalne przetworniki sygnału.* Kwart. El. i Tel. 1990, 36, z. 3–4
14. Z. W r ó b e l: *Synteza topologiczna struktur kanonicznych grafów dwójników i czwórników.* Prace Wydz. Techniki, Uniwersytetu śląskiego Katowice 1990

Z. WRÓBEL

STRUCTURAL FUNCTIONS OF GRAPHS OF ONE-PORT AND TWO-PORT CIRCUITS WHICH CONSIST OF TWO KINDS OF ELEMENTS

Summary

Basic definitions and topological models of one-port and two-systems consisting of two kinds of elements along with their characteristic parameters were shown in this paper. Formalized record of particular parameters characteristic of structural properties of the examined circuits was presented and it is treated as the basic for formulating algebraic criteria of homeomorphism (i. e. structural equipose) of there circuits [11] and used in the process of topological synthesis of one-port canonical structures. [12]

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, z. 1–2, SS. 53–65

621.315.592

Homeomorfizm grafów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów

ZYGMUNT WRÓBEL

Zakład Elektrotechniki i Automatyki
Instytutu Problemów Techniki, Uniwersytet Śląski

Otrzymano 1989.11.10

Autoryzowano do druku 1990.05.16

W pracy przedstawiono algebraiczne kryteria homeomorfizmu strukturalnej równoważności w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego, unigrafów i bi-grafów układów dwójników bądź czwórników składających się z dwóch rodzajów [slssop] elementów $\{t_1, t_2\}$.

1. WSTĘP

Podstawowe definicje i modele topologiczne układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów oraz sformalizowany zapis poszczególnych parametrów charakteryzujących strukturalne własności rozpatrywanych układów, konieczne do sformułowania algebraicznych kryteriów homeomorfizmu tych układów przedstawiono w pracy [17]. Jak wiadomo uzyskiwane w procesie syntezy układów, rozwiązanie jest w większości przypadków niejednoznaczne [1, 11, 12, 15]. Może bowiem istnieć wiele układów, o różnych strukturach i różnych wartościach tworzących go elementów, które spełniają postawione zadanie syntezy. Są to więc układy równoważne względem przyjętych kryteriów.

Pojęcie równoważności w literaturze dotyczącej układów elektrycznych ma dwa znaczenia. W pierwszym przypadku rozpatrywane układy traktuje się jako *„czarne skrzynki"* i uważa się, że dwa układy są równoważne jeśli na zadane wymuszenie odpowiedzi układów w obu przypadkach są jednakowe z dokładnością do stałej różnej od zera. Ten typ równoważności układów w literaturze określa się często pojęciem ekwiwalentności. Istnieje wiele prac w których dla różnych typów układów formułuje się warunki ich ekwiwalentności [3, 5–8, 13]. W ninjeszej pracy tak rozumianą równoważnością układów nie będziemy się zajmować.

W drugim przypadku pojęcie równoważności układów jest związane z odpowiedzialnością ich macierzy obwodów (cykli). Ten typ równoważność definiuje się

następująco: „Dwa układy równoważne, jeśli ich strukturalne macierze obwodów różnią się tylko permutacją wierszy i kolumn". Ten typ równoważności dwóch układów można określić pojęciem homeomorfizmu. [1].

W ogólnym przypadku homeomorfizmem zbioru X w zbiór Y nazywamy przekształcenie (odwzorowanie) zbioru X na zbiór Y h: $X \rightarrow Y$ spełniające warunki $X = D_l(h)$ i $D_p(h) = Y$ (gdzie: $D_l(h)$ i $D_p(h)$ — odpowiednio lewa i prawa dziedzina funkcji przekształcenia homeomorficznego). Dwa układy będziemy nazywali homeomorficznymi jeśli strukturalną macierz obwodów pierwszego układu, można przekształcić (permutacją jej wierszy i kolumn) na strukturalną macierz obwodów drugiego układu.

W teorii grafów [4, 16] wykazano że: „Dwa grafy mają tę samą strukturalną macierz obwodu, wtedy i tylko wtedy gdy są one 2-izomorficzne lub izomorficzne". Pod pojęciem równoważności dwóch układów będziemy rozumieć homeomorfizm struktur topologicznych grafów odwzorujących te układy. Dwa układy będziemy nazywali homeomorficznymi, jeśli bi-graf pierwszego układu można izomorficznie lub 2-izomorficznie przekształcić w bi-graf drugiego układu.

Określenie algebraicznych kryteriów homeomorfizmu, ma istotne znaczenie między innymi w procesie syntezy topologicznej struktur kanonicznych układów [18]. Dotychczas nie tylko nie opracowano algebraicznych kryteriów homeomorfizmu bi-grafów, brak nawet kryteriów homeomorfizmu najprostszej formy grafu — tzn. unigrafu [4, 14, 16]. Zaprezentowana w pracy [18] procedura syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów układów dwójników składających się z dwóch rodzajów [slssop] elementów metodą przeglądu hierarchicznego, w ogólnym przypadku obejmuje w zasadzie dwa odrębne zagadnienia.

1. Pierwszą grupą zagadnień jest generacja wszystkich możliwych cyklicznie spójnych unigrafów o zadanej liczbie wierzchołków i zadanej liczbie gałęzi, oraz podział otrzymanych unigrafów na klasy unigrafów niehomeomorficznych względem siebie.

2. Druga grupa zagadnień dotyczy *„wypełnienia"* jednego przedstawiciela z każdej klasy typów unigrafów, elementami poszczególnych rodzajów $\{t_1, t_2\}$, oraz podział otrzymanych bi-grafów na klasy układów niehomeomorficznych względem siebie — klasy struktur kanonicznych. Wynika stąd, że w ogólnym przypadku zagadnienie homeomorfizmu (sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego) dwóch układów składających się z $\{t_1, t_2\}$ rodzajów [slssop] elementów można podzielić na dwa odrębne zagadnienia.

1. Homeomorfizm unigrafów tych układów
2. Homeomorfizm bi-grafów tych układów.

Dotychczas brak prostych algebraicznych kryteriów pozwalających stwierdzić homeomorfizm w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego dwóch grafów układów [4, 14, 16]. Można oczywiście skorzystać z przytoczonej wyżej definicji homeomorfizmu — strukturalnej równoważności dwóch układów. „Dwa układy $D_I(Y_{1i}, Y_2)$ i $D_{II}(Y_{1i}, Y_2)$ są homeomorficzne jeśli macierz obwodów układu $D_I(Y_{1i}, Y_2)$ można przekształcić w macierz obwodów układu $D_{II}(Y_{1i}, Y_{2j})$ permutacją jej kolumn i wierszy". Aby skorzystać z powyższej definicji należy

heurystycznie zadać macierze obwodów rozpatrywanych układów a następnie (w najgorszym przypadku) wykonać $(L_k+L_w)!$ operacji przestawień (gdzie: L_k i L_w – odpowiednio liczba kolumn i wierszy w macierzy obwodów). Taka procedura stwierdzania homeomorfizmu układów nie jest przydatna w procesie syntezy ich struktur kanonicznych, ponieważ nie znamy explicite strukturalnej macierzy obwodów generowanych układów, a ponadto liczba przestawień i porównań jest zbyt wielka.

Z teorii grafów [4, 16] wynika, że dotychczas brak prostych algebraicznych kryteriów, które pozwoliłyby na stwierdzenie homeomorfizmu – strukturalnej równoważności w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego dwóch dowolnych unigrafów bądź bi-grafów układów dwójników lub czwórników niezależnie od ich struktury (topologii), liczby wierzchołków, czy liczby elementów poszczególnych rodzajów.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie algebraicznych warunków jakie muszą spełniać dwa unigrafy oraz dwa bi-grafy odwzorujących dwa układy dwójników lub czwórników, aby były one homeomorficzne w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego.

2. IZOMORFIZM I 2-IZOMORFIZM GRAFÓW

Zanim przejdziemy do sformułowania algebraicznych warunków jakie muszą spełniać dwa układy zbudowane z $\{t_1, t_2\}$ rodzajów [slssop] elementów odwzorowane w postaci ich unigrafów oraz bi-grafów, aby były one homeomorficzne w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego, niżej krótko omówiono oba rodzaje przekształceń [4, 16].

Dwa grafy (unigrafy, multigrafy, bi-grafy) są homeomorficzne w sensie przekształcenia izomorficznego, jeśli zachodzi wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ich węzłami (wierzchołkami) oraz między ich elementami (gałęziami) przy zachowaniu relacji incydencji. Z definicji izomorfizmu wynika, że jeśli dwa grafy są homeomorficzne w sensie przekształcenia izomorficznego to mają: – tę samą liczbę gałęzi. – tę samą liczbę węzłów. – tę samą liczbę węzłów o danym stopniu.

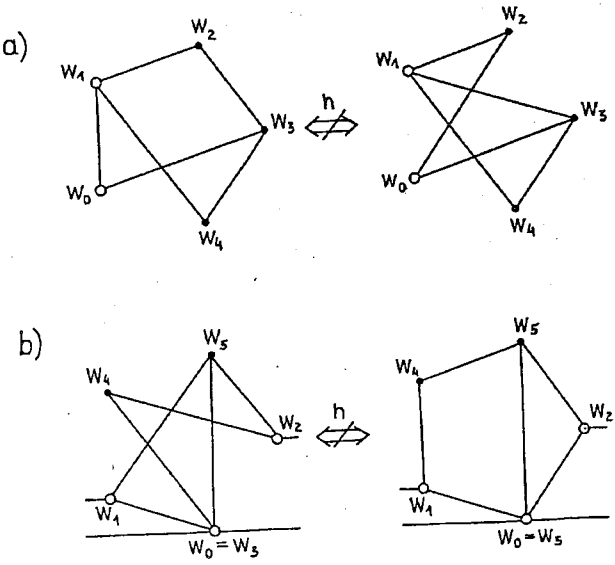
Są to niestety tylko warunki konieczne, ale nie dostateczne do stwierdzenia izomorfizmu dwóch układów, co dla unigrafów układów dwójników i czwórników ilustruje rys. 1, natomiast dla bi-grafów tych układów ilustruje rys. 2.

Przekształcenie 2-izomorficzne w literaturze [4, 16] jest definiowane w sposób opisowy. Dwa grafy (unigrafy, multigrafy, bi-grafy) są homeomorficzne w sensie przekształcenia 2-izomorficznego, jeśli stają się izomorficzne po przeprowadzeniu *„operacji"* zilustrowanej na rysunku 3.

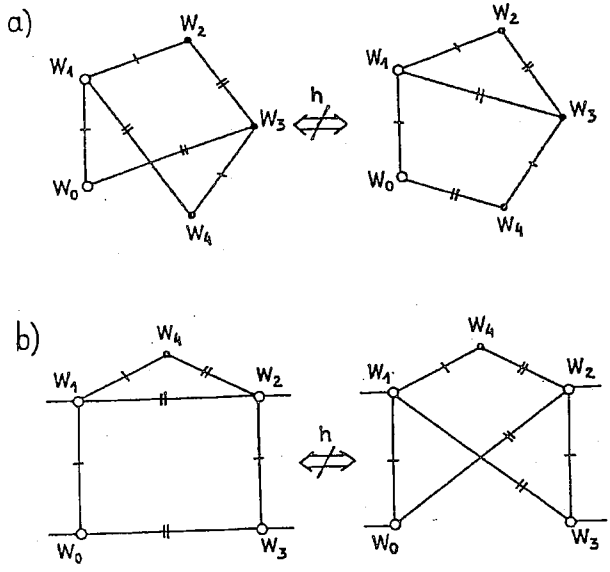
Z definicji 2-izomorfizmu wynika, że jeśli dwa grafy są homeomorficzne w sensie przekształcenia 2-izomorficznego to mają:

– tę samą liczbę gałęzi
– tę samą liczbę węzłów.

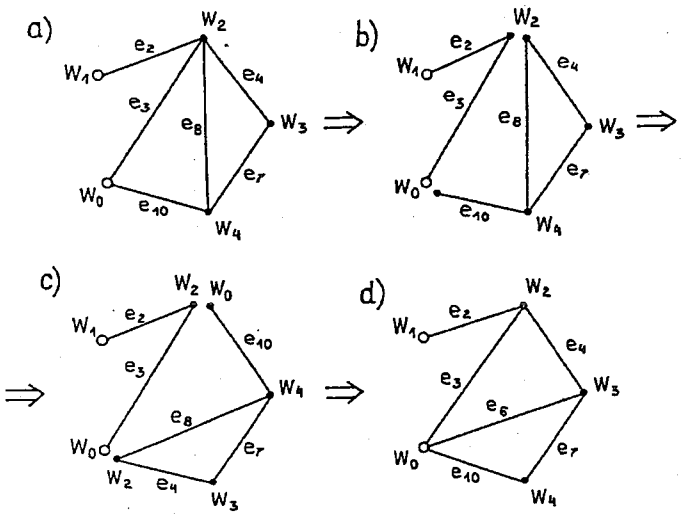
Należy zwrócić uwagę, że stopnie wierzchołków układów homeomorficznych w sensie przekształcenia 2-izomorficznego mogą być różne, co ilustruje rysunek 3. Są to niestety tylko warunki konieczne, ale nie dostateczne do stwierdzenia strukturalnej równoważności (homeomorfizmu) dwóch grafów, co ilustrują rysunki 1 i 2.



Rys. 1. Przykłady niehomeomorficznych unigrafów odwzorujących; a) układy dwójników, b) układy czwórników spełniających warunki konieczne homeomorfizmu



Rys. 2. Przykłady niehomeomorficznych bi-grafów odwzorujących; a) układy dwójników, b) układy czwórników spełniających warunki konieczne homeomorfizmu



Rys. 3. Unigrafy a) i d) są 2-izomorficzne

Dotychczas brak ogólnego algorytmu pozwalającego stwierdzić homeomorfizm (w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego) dwóch unigrafów $G_I(t)$ i $G_{II}(t)$, odwzorujących dwa układy $D_I(Y_{1i}, Y_{2j})$ i $D_{II}(Y_{1i}, Y_2)$, co jest związane przede wszystkim z trudnościami algorytmizacji przekształcenia 2-izomorficznego.

2. HOMEOMORFIZM UNIGRAFÓW UKŁADÓW

Niżej przedstawiono warunki konieczne i dostateczne jakie muszą spełniać dwa unigrafy $G_I^v(t)$ i $G_{II}^v(t)$ układów dwójników i czwórników, aby były one homeomorficzne w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego.

Twierdzenie 1

Dwa unigrafy $G_I^v(t)$ i $G_{II}^v(t)$ układów $D_I^v(Y_{1i}, Y_{2j})$ i $D_{II}^v(Y_{1i}, Y_{2j})$ są homeomogficzne wtedy i tylko wtedy gdy:

1: $$|W_I| = |W_{II}| \tag{1}$$

2: $$|E_I\{e_i\}_l| = |E_{II}\{e_i\}_l| \tag{2}$$

2a: $$|E_I\{e_i\}_b| = |E_{II}\{e_i\}_b| \tag{3}$$

3: $$\{LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}_I = \{LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}_{II}, \tag{4}$$

gdzie:

$|W_I|$, $|W_{II}|$ – moce zbiorów węzłów odpowiednio unigrafów $G_I^v\{t\}$ i $G_{II}^v\{t\}$.

$|E_I\{e_i\}_l|$, $|E_{II}\{e_i\}_l|$ – moce zbiorów gałęzi odpowiednio unigrafów $G_I^v\{t\}$ i $G_{II}^v\{t\}$.

l – liczba gałęzi w unigrafie.

$|E_I\{e_i\}_b|$, $|E_{II}\{e_i\}_b|$ – moce zbiorów gałęzi incydentnych do odpowiadających sobie wierzchołków brzegowych odpowiednio unigrafów $G_I^v\{t\}$ i $G_{II}^v\{t\}$.

$\{LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}_I$, $\{LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}_{II}$ – zbiory liczb poszczególnych typów dendrytów k-drzewowych w unigrafach $G_I^v\{t\}$ i $G_{II}^v\{t\}$

utworzone jako $v-k$ elementowe wariacje bez powtórzeń z ich $l-(k-1)$ gałęzi $\{e_i\}$ zbioru $E\{e_i\}_l$ nie zawierających tylko permutacji jego $(k-1)$ gałęzi $\{e_j\}$ zbioru $E\{e_j\}_l$.

Dowód:

Warunek pierwszy oznacza, że w homeomorficznych unigrafach zbiory wierzchołków obu unigrafów są równoliczne. Warunek ten wynika z definicji izomorfizmu i 2-morfizmu. Należy zwrócić uwagę, że warunek ten wcale nie oznacza, że odpowiadające sobie wierzchołki tych unigrafów mają takie same stopnie. Na przykład układy pokazane na rysunku 3 są homeomorficzne a stopnie ich wierzchołków są różne.

Warunek 2 oznacza, że w homeomorficznych unigrafach moce zbiorów gałęzi obu unigrafów są równoliczne. Warunek ten wynika z definicji izomorfizmu i 2-izomorfizmu. Warunek 2a oznacza, że w homeomorficznych unigrafach zbiory gałęzi incydentnych do odpowiadających sobie wierzchołków brzegowych (wierzchołki wejściowe i wyjściowe) obu unigrafów są równoliczne. Warunek ten wynika z faktu, że w dowolnych przekształceniach izomorficznych i 2-izomorficznych układów fizycznych (odwzorowanych w postaci ich unigrafów, multigrafów, i bi-grafów) tylko gałęzie incydentne do wierzchołków brzegowych przekształcają się same w siebie. Są to warunki konieczne ale nie dostateczne homeomorfizmu dwóch unigrafów, co ilustrują rysunki 1 i 2.

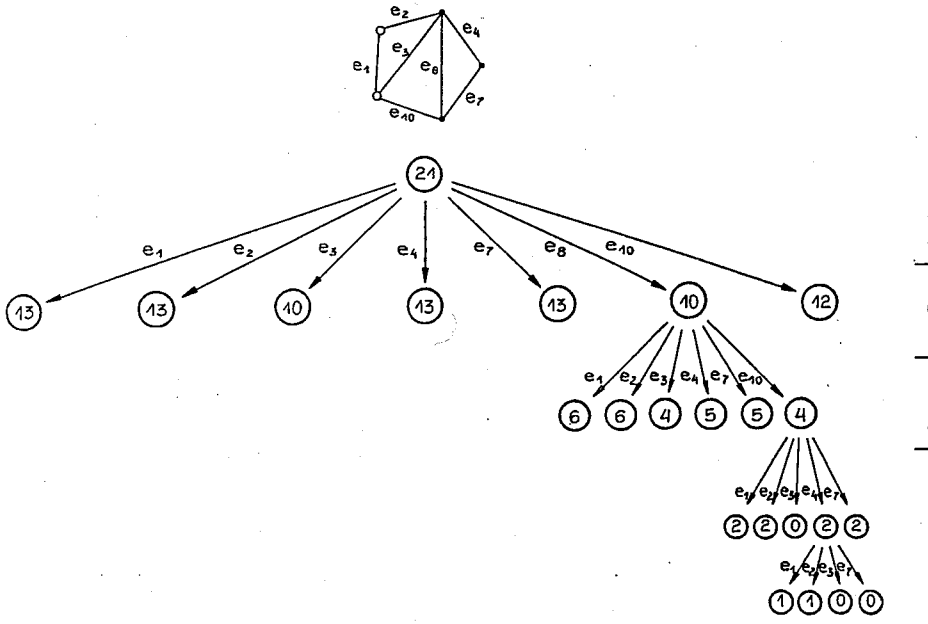
Warunkiem dostatecznym homeomorfizmu unigrafów $G_I^v\{t\}$ i $G_{II}^v\{t\}$ jest warunek trzeci, który stwierdza, że zbiory liczb poszczególnych typów dendrytów k-drzewowych $\{LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}_I$ utworzonych w unigrafie $G_I^v\{t\}$, są równe zbiorom liczb dendrytów k-drzewowych $\{LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}_{II}$ utworzonych w unigrafie $G_{II}^v\{t\}$. Warunek ten wynika z faktu, że dowolne izomorficzne lub 2-izomorficzne przekształcenia unigrafu $G_I^v\{t\}$ w unigraf $G_{II}^v\{t\}$ powoduje, że każdy dendryt k-drzewowy $T_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]_I$ występujący w unigrafie $G_I^v\{t\}$ przekształca się jednoznacznie w odpowiadający mu dendryt k-drzewowy $T_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]_{II}$ występujący w unigrafie $G_{II}\{t\}$.

c.n.d.

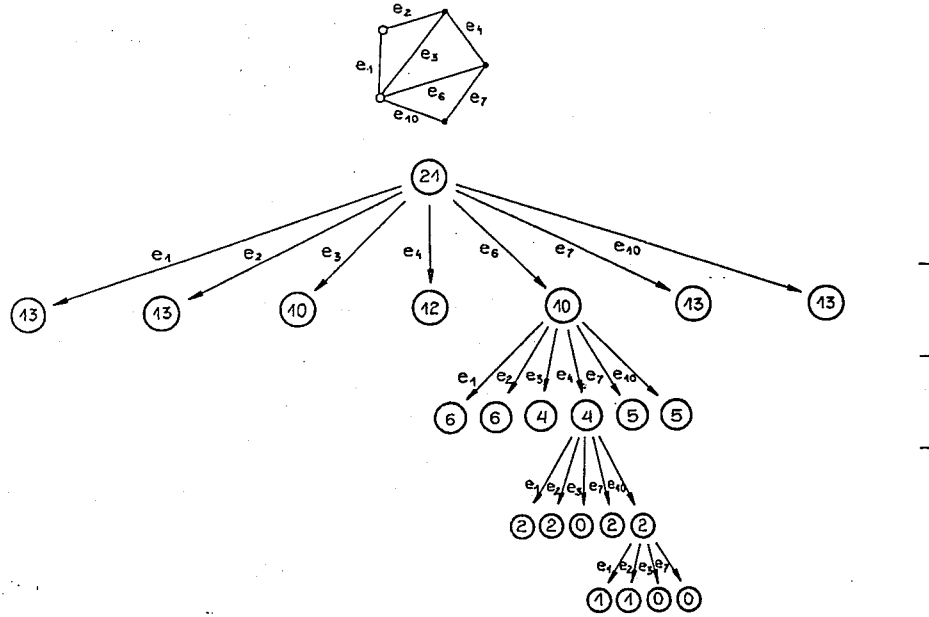
Sens fizyczny warunku trzeciego ilustrują rysunki 4 i 5, na których dla dwóch unigrafów $G^5(t)$ zawierających $l=7$ gałęzi pokazano poszczególne zbiory liczb dendrytów k-drzewowych $\{T_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}$.

Jak łatwo zauważyć poszczególne ciągi elementów $\{e_i\}$ od *„kółka"* oznaczającego liczbę dendrytów k-drzewowych do poszczególnych *„kółek"* w ostaniej linii, to nic innego jak wszystkie różnowartościowe $\{v-k\}$ elementowe ciągi elementów zbioru $\{E[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]\}$.

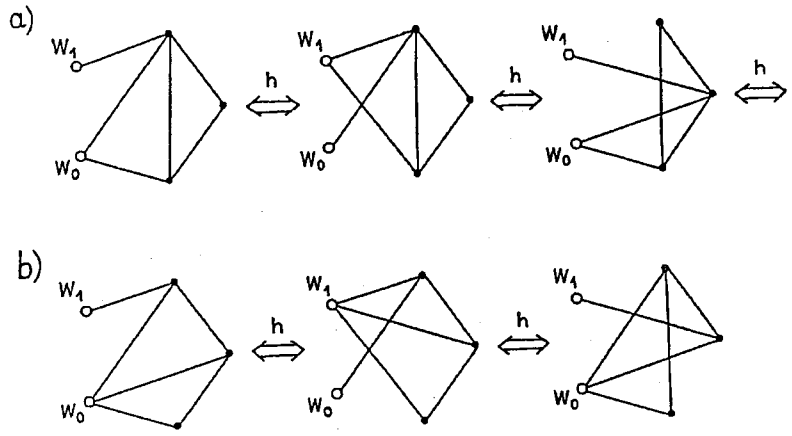
Należy zwrócić uwagę że warunek trzeci twierdzenia 1 można również interpretować następująco: Dwa unigrafy $G_I^v(t)$ i $G_{II}(t)$ są homeomorficzne, jeśli ciągi liczbowe charakteryzujące poszczególne drzewa z korzeniem położonym na danym poziomie (rys. 4), jednego unigrafu — można przyporządkować odpowiednim ciągom liczbowym charakteryzującym poszczególne drzewa z korzeniem położonym na tym samym poziomie (rys. 5), drugiego unigrafu. Należy zwrócić uwagę że *„cząstkowe"* korzenie drzew dla każdej grupy dendrytów k-drzewowych leżą na



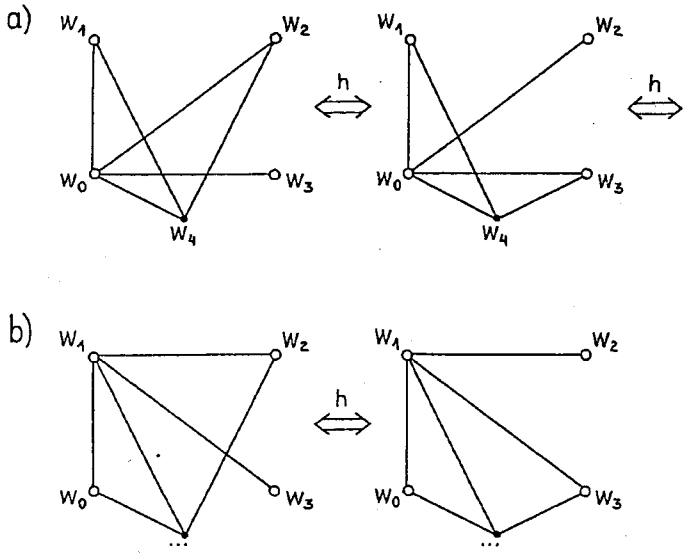
Rys. 4. Liczby dendrytów k-drzewowych $LT_k^v(t) = LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]$ unigrafu $G^5(t) = t, 0, t, t, 0, 0, t, t, t, t$



Rys. 5. Liczby dendrytów k-drzewowych $LT_k^v(t) = LT_k^v[\{e_i\}_{l-(k-1)} - \{e_j\}_{k-1}]$ unigrafu $G^5(t) = t, 0, 0, t, t, 0, t, t, t, t$



Rys. 6. Przykłady homeomorficznych unigrafów odwzorujących układy dwójników



Rys. 7. Przykłady homeomorficznych unigrafów odwzorujących układy czwórników

jednym i tym samym *„poziomie"* (rys. 4 i 5). Liczba cząstkowych korzeni drzew jest funkcją liczby gałęzi l rozpatrywanego unigrafu i parametru k określającego stopień dendrytu k-drzewowego.

Przykłady homeomorficznych unigrafów dwójników pokazano na rysunku 6. Natomiast na rysunku 7 zilustrowano homeomorfizm unigrafów czwórników.

3. HOMEOMORFIZM BI-GRAFÓW UKŁADÓW

Niżej sformułowano warunki konieczne i dostateczne homeomorfizmu dwóch bi-grafów $G_I^v(t_1, t_2)$ i $G_{II}^v(t_1, t_2)$ odwzorujących dwa układy dwójników lub czwórników $D_I^v(Y_{1i}\, t_1, Y_{2j}\, t_2)$ i $D_{II}^v(Y_{1i}\, t_1, Y_{2j}\, t_2)$.

Twierdzenie 2

Dwa bi-grafy $G_I^v(t_1, t_2)$ i $G_{II}^v(t_1, t_2)$ układów dwójników lub czwórników $D_I^v(Y_{1j}\, t_1, Y_{2j}\, t_2)$ i $D_{II}^v(Y_{1i}\, t_1, Y_{2j}\, t_2)$ są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy:

1: $$G_I^v(t) \overset{h}{\leftrightarrow} G_{II}^v(t) \tag{5}$$

2: $$|E_I(t_1, t_2)| = |E_{II}(t_1, t_2)| \tag{6}$$

3: $$|e_I(t_1, t_2)| = |e_{II}(t_1, t_2)| \tag{7}$$

4: $$F_I[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2)] = F_{II}[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2)], \tag{8}$$

gdzie:

$G_I(t)$, $G_{II}(t)$ – unigrafy odpowiednio bi-grafów $G_I^v(t_1, t_2)$ i $G_{II}^v(t_1, t_2)$.

$|E_I(t_1, t_2)|$, $|E_{II}(t_1, t_2)|$ – moce zbiorów elementów typów $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$ odpowiednio bi-grafów $G_I^v(t_1, t_2)$ i $G_{II}^v(t_1, t_2)$.

$|e_I(t_1, t_2)|$, $|e_{II}(t_1, t_2)|$ – moce zbiorów elementów typów $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$ incydentnych do odpowiadających sobie wierzchołków brzegowych w bi-grafach $G_I^v(t_1, t_2)$ i $G_{II}^v(t_1, t_2)$.

$F_I[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2)]$ i $F_{II}[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2)]$ – funkcje strukturalne charakteryzujące dany parametr odpowiednio bi-grafu $G_I^v(t_1, t_2)$ i $G_{II}^v(t_1, t_2)$.

Dowód:

Warunek pierwszy oznacza, że dwa bi-grafy $G_I^v(t_1, t_2)$ i $G_{II}^v(t_1, t_2)$ układów są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy ich unigrafy $G_I^v(t)$ i $G_{II}^v(t)$ są homeomorficzne. Należy zwrócić uwagę, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Warunek ten wynika z faktu, że równoległe elementy w bi-grafie nie wpływają na strukturę układu w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego.

Warunek drugi oznacza, że w homeomorficznych układach moce zbiorów poszczególnych rodzajów elementów $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$ są równoliczne, co można również zapisać w postaci:

2.a: $$|E_I(t_1)| = |E_{II}(t_1)| \tag{9}$$

2.b: $$|E_I(t_2)| = |E_{II}(t_2)| \tag{10}$$

Warunki te wynikają z definicji izomorfizmu i 2-izomorfizmu. Należy zwrócić uwagę, że przekształcenia te wcale nie oznaczają, że w obu układach istnieją elementy o jednakowych admitancjach. Przekształcenia te oznaczają tylko, że zbiory elementów obu typów $\{t_1\}$, $\{t_2\}$ są równoliczne.

Trzeci warunek oznacza, że w homeomorficznych układach moce zbiorów poszczególnych typów elementów $\{t_1\}$, $\{t_2\}$ incydentnych do odpowiadających sobie wierzchołków brzegowych (wierzchołki wejściowe i wyjściowe) obu układów są równoliczne, co można również zapisać w postaci:

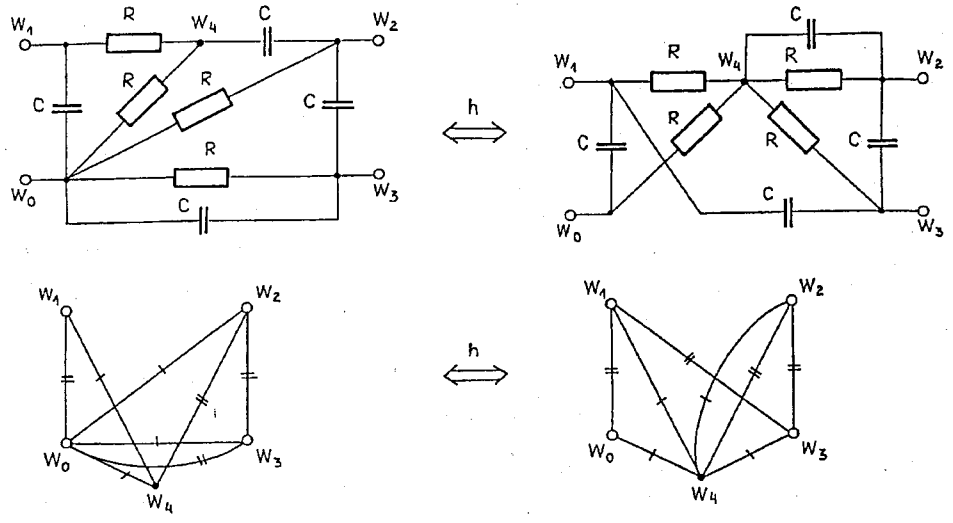
3.a: $$|e_I(t_1)| = |e_{II}(t_1)| \tag{11}$$

3.b: $$|e_I(t_2)| = |e_{II}(t_2)| \tag{12}$$

Warunki te wynikają z faktu, że w dowolnych przekształceniach izomorficznych i 2-izomorficznych układów, tylko elementy incydentne do wierzchołków brzegowych przekształcają się same w siebie.
Są to warunki konieczne, ale nie dostateczne homeomorfizmu dwóch układów, co ilustruje rysunek 2.

Warunkiem dostatecznego homeomorfizmu względem parametru $F(t_1, t_2)$ charakteryzującego dane układy $D_I^v(Y_{1i}\ t_1,\ Y_{2j}\ t_2)$ i $D_{II}^v(Y_{1i}\ t_1,\ Y_{2j}\ t_2)$ jest warunek czwarty, który stwierdza że: każdy element funkcji strukturalnej $F_I[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2)]$ układu $D_I^v(Y_{1j}\ t_1,\ Y_{2j}\ t_2)$, musi być równy odpowiedniemu elementowi funkcji strukturalnej $F_{II}[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2)]$ układu $D_{II}^v(Y_{1i}\ t_1,\ Y_{2j}\ t_2)$. Warunek ten wynika z faktu, że dowolne izomorficzne lub 2-izomorficzne przekształcenia układu $D_I^v(Y_{1i}\ t_1,\ Y_{2j}\ t_2)$ w układ $D_{II}^v(Y_{1i}\ t_1,\ Y_{2j}\ t_2)$ powoduje, że każdy dendryt k-drzewowy $T_k^v(t_1^{n_{1k}}, t_2^{n_{2k}})|_I$ składający się z n_{1k} elementów typu t_1 i $n_{2k} = v-k-1$ elementów typu t_2 występujący w równaniu określającym parametr $F(t_1, t_2)$ układu D_I^v jaki $(Y_{1i}\ t_1,\ Y_{2j}\ t_2)$, przekształca się jednoznacznie w odpowiadający mu dendryt k-drzewowy $T_k^v(t_1^{n_{1k}}, t_2^{n_{2k}})|_{II}$ występujący w równaniu określającym ten sam parametr $F(t_1, t_2)$ układu $D_{II}^v(Y_{1i}\ t_1,\ Y_{2j}\ t_2)$.

c.n.d.



$Z_{11}[\mathrm{LT}^5(t_1 t_2)] = \left\langle \frac{2.9.9.1}{1.7.15.10.1} \right\rangle$

$Z_{12}[\mathrm{LT}^5(t_1 t_2)] = Z_{21}[\mathrm{LT}^5(t_1 t_2)] =$

$= \left\langle \frac{0.1.1.0 - 0.0.0.0}{1.7.15.10.1} \right\rangle$

$Z_{22}[\mathrm{LT}^5(t_1 t_2)] = \left\langle \frac{2.8.7.1}{1.7.15.10.1} \right\rangle$

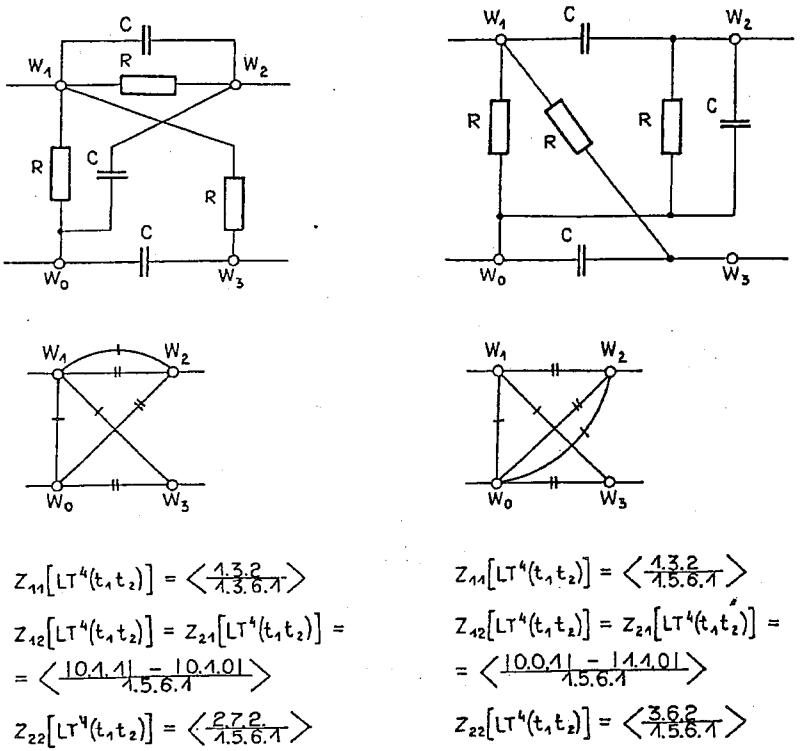
$Z_{11}[\mathrm{LT}^5(t_1 t_2)] = \left\langle \frac{2.9.9.1}{1.7.15.10.1} \right\rangle$

$Z_{12}[\mathrm{LT}^5(t_1 t_2)] = Z_{21}[\mathrm{LT}^5(t_1 t_2)] =$

$= \left\langle \frac{0.1.1.0 - 0.0.0.0}{1.7.15.10.1} \right\rangle$

$Z_{22}[\mathrm{LT}^5(t_1 t_2)] = \left\langle \frac{2.8.7.1}{1.7.15.10.1} \right\rangle$

Rys. 8. Przykład układów czwórników RC których bi-grafy są homeomorficzne względem wszystkich parametrów $Z_{ij}(t_1, t_2)$



$$Z_{11}[LT^4(t_1,t_2)] = \left\langle \frac{1.3.2}{1.3.6.1} \right\rangle$$

$$Z_{12}[LT^4(t_1,t_2)] = Z_{21}[LT^4(t_1,t_2)] = \left\langle \frac{10.1.1 - 10.1.01}{1.5.6.1} \right\rangle$$

$$Z_{22}[LT^4(t_1,t_2)] = \left\langle \frac{2.7.2}{1.5.6.1} \right\rangle$$

$$Z_{11}[LT^4(t_1,t_2)] = \left\langle \frac{1.3.2}{1.5.6.1} \right\rangle$$

$$Z_{12}[LT^4(t_1,t_2)] = Z_{21}[LT^4(t_1,t_2)] = \left\langle \frac{10.0.1 - 1.1.1.01}{1.5.6.1} \right\rangle$$

$$Z_{22}[LT^4(t_1,t_2)] = \left\langle \frac{3.6.2}{1.5.6.1} \right\rangle$$

Rys. 9. Przykład układów czwórników RC których bi-grafy są homeomorficzne względem tylko parametru $Z_{11}(t_1, t_2)$

Na rysunku 8 przedstawiono dwa czwórniki RC, które są homeomorficzne względem wszystkich parametrów $Z_{ij}(t_1, t_2)$ ich charakteryzujących. Taką równoważność będziemy nazywali pełnym homemorfizmem dwóch układów. Należy zwrócić uwagę, że na podstawie wyżej udowodnionego twierdzenia, można również stwierdzić homemorfizm na przykład względem tylko jednego parametru charakteryzującego dane układy. Na rysunku 9 przedstawiono dwa czwórniki RC, które są homemorficzne tylko względem parametru $Z_{11}(t_1, t_1)|_I = Z_{11}(t_1, t_2)|_{II}$.

PODSUMOWANIE

Do najważniejszych rezultatów niniejszej pracy można zaliczyć:

1. Opracowanie algebraicznych kryteriów homeomorfizmu (równoważności w sensie przekształcenia izomorficznego lub 2-izomorficznego) dwóch unigrafów $G_I(t)$ i $G_{II}(t)$ odwzorujących dwa układy.

2. Opracowanie algebraicznych kryteriów homeomorfizmu dwóch bi-grafów $G_I(t_1, t_2)$ i $G_{II}(t_1, t_2)$ odwzorujących dwa układy dwójników bądź czworników składające się z dwóch rodzajów [slssop] elementowo admitancjach $\{Y_{1i}\, t_1\}$ i $\{Y_{2j}\, t_2\}$.

Przedstawione algebraiczne kryteria homeomorfizmu unigrafów i bi-grafów układów składających się z dwóch rodzajów [slssop] elementów, mogą być użyteczne nie tylko w procesie syntezy ich struktur kanonicznych [18], ale również w procesie analizy lawinowo pojawiających się opracowań nowych typów układów składających się z dwóch rodzajów elementów. W większości opracowań struktury nowo proponowanych układów są wprowadzane w sposób heurystyczny — metoda otrzymania nowej struktury nie jest zwykle dyskutowana.

Opracowane kryteria równoważności pozwalają stwierdzić czy rozpatrywane w pracach różnych autorów układy są homeomorficzne w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego. Jest to szczególnie istotne dla układów o większej liczbie wierzchołków ($v>5$) i dużej liczbie lementów, gdzie liczba cyklicznie spójnych układów pretendentów jest dziesiątki (dla $v=5$) i setki (dla $v=6$) razy większa od liczby typów układów strukturalnie nierównoważnych [18].

BIBLIOGRAFIA

1. S. Belert, H. Woźnicki: *Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych.* Warszawa: WNT, 1968
2. S. Bolkowski: *Elektrotechnika teoretyczna — teoria obwodów elektrycznych.* Warszawa: WNT, 1982
3. A. Cichocki, S. Osowski: *Przekształcenia ekwiwalentne układów drabinkowych.* Rozprawy Elektroniczne, 1979, t. XXV, z. 1, ss. 107—120
4. N. Deo: *Teoria grafów i jej zastosowanie w technice i informatyce.* Warszawa: PWN, 1980
5. L. G. Grant, J. I. Sewell: *A theory of equivalent active networks.* IEEE. Trans. Circuits and Systems, 1976, vol. CAS—23, pp. 350—354
6. O. Huseyin: *Application of equivalent network theory.* IEEE. Trans. Circuit Theory, 1972, vol. CT—19, pp. 376—378
7. C. F. Kurth, G. S. Moschytz: *Two-port analysis of switched capacitors networks using four-port equivalent circuits in the z-domain.* IEEE. Trans. Circuits and Systems, 1979, vol. CAS—26, pp. 166—180
8. K. R. Laker: *Equivalent circuits for the analysis and synthesis switched-capacitor network.* Bell Syst. Tech. J. 1979, pp. 729—769
9. A. A. Lanne i inni: *Optimalnaja realizacja liniejnych RLC schiem.* Kijów: Naukowaja dumka, 1982
10. W. Lipski: *Kombinatoryka dla programistów.* Warszawa: WNT, 1982
11. N. G. Maksimowicz: *Teoria grafów i elektriczskije cepii.* Lwów: Wisza szkola, 1987
12. K. Mikołajuk, Z. Trzaska: *Elektrotechnika teoretyczna — analiza i synteza eletrycznych obwodów liniowych.* Warszawa: PWN, 1984
13. M. S. Piekarski: *Synteza i realizacje równoważne dwójników i czwórników RC o strukturze drabinkowej prostej.* Archiwum Elektrotechniki, 1976, t. XXV, z. 3, ss. 619—635
14. M. E. Reingold, J. Nievergelt, N. Deo: *Algorytmy kombinatoryczne.* Warszawa: PWN, 1985
15. S. Seshu, M. B. Reed: *Linear graphs and electrical networks.* Addison Wasley, Reading Mass. 1968
16. M. N. S. Swamy, K. Thulasirman: *Graphs, networks and algorithms.* New York: Wiley — Interscince, 1981
17. Z. Wróbel: *Funkcje strukturalne grafów układów dwójników i czwórników zbudowanych z dwóch rodzajów elementów.* Kwart. El. i Tel. 1991, 37, z. 1—2
18. Z. Wróbel: *Synteza topologiczna struktur kanonicznych bi-grafów układów dwójników składających się z dwóch rodzajów elementów.* Kwart. El. i Tel. 1991, 37, z. 1—2

Z.WRÓBEL

HOMEOMORPHISM OF GRAPHS OF ONE-PORT AND TWO-PORT CIRCUITS CONSISTING OF TWO KINDS OF ELEMENTS

Summary

Algebraic criteria of homeomorphism – structural equivalence in the sense of isomorphic ad 2-isomorphic transformation, unigraphs and bigraphs of one-port or two-port circuits consisting of two kinds of elements $\{t_1, t_2\}$ were presented in this paper.

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, z. 1–2, SS. 67–83

621.372.4:
621.3.012.1

Synteza struktur kanonicznych bi-grafów dwójników składających się z dwóch rodzajów elementów

ZYGMUNT WRÓBEL

Zakład Elektroniki i Automatyki
Instytut Problemów Techniki, Uniwersytet Śląski

Otrzymano 1990.05.16
Autoryzowano do druku 1990.11.18

CZĘŚĆ 1. METODA PRZEGLĄDU BEZPOŚREDNIEGO

W pracy przedstawiono procedurę syntezy topologicznej struktur kanonicznych metodą przeglądu bezpośredniego, pozwalającą wygenerować wszystkie możliwe topologiczne struktury bi-grafów dwójników.
Wykazano, że istnieją cztery grupy bi-grafów dwójników $G^v(t_1, t_2) = T_{k_1}{}^v(t_1) \cup T_{k_2}{}^v(t_2)$, dla $k_1 = 1 \vee 2, k_2 = 1 \vee 2$ [gdzie: $T_{ki}{}^v(t_i)$ – dendryt k-drzewowy zawierający tylko elementy typu $\{t_i\}$], których admitancja wejściowa $Y(t_1, t_2)$ jest funkcją wymierną o maksymalnym stopniu licznika i mianownika przy minimalnych liczbach $n(t_1)$ elementów obu rodzajów $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$.

1.1. WSTĘP

Synteza układów jest zwykle rozumiana jako zbiór metod umożliwiających wyznaczenie rodzaju i wartości elementów, oraz sposobu ich połączenia tak aby otrzymany w efekcie układ fizyczny realizował żądaną zależność funkcyjną.

Ogólnie biorąc w procesie syntezy układów można wyróżnić w zasadzie trzy odrębne grupy zagadnień [27]:

- aproksymację.
- syntezę topologiczną.
- syntezę parametryczną.

Teoria aproksymacji podaje sposoby znalezienia funkcji, które z określoną dokładnością przybliżają zadane charakterystyki.

Mając wyznaczone typy funkcji które mogą być realizowane przez układ, można przystąpić do określenia jego struktury (synteza topologiczna) i wartości tworzących go elementów (synteza parametryczna). Podstawowe definicje konieczne do zrozumienia rozważań niniejszej pracy przedstawiono w pracy [24].

Zagadnienia syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników przedstawiono w niniejszej pracy, natomiast przykład syntezy parametrycznej otrzymanych dwójników przedstawiono w pracy [26].

Pod pojęciem syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników, będziemy rozumieć generację wszystkich możliwych struktur topologicznych grafów układów składających się z $\{t_1, t_2\}$ rodzajów skupionych, liniowych, skończonych, stacjonarnych odwracalnych i pasywnych [slssop] elementów, oraz ich podział na klasy struktur nie homeomorficznych (w sensie przekształcenia izomorficznego i 2-izomorficznego) względem siebie.

Przedstawiciela z każdej klasy struktur homeomorficznych, będziemy nazywali typem strukturalnym lub topologiczną strukturą kanoniczną grafu układu (w skrócie strukturą kanoniczną $G^v(t_1, t_2)$ układu). Struktura kanoniczna $G^v(t_1, t_2)$, jest więc niezmiennikiem przekształceń homemorficznych bi-grafów rozpatrywanych układów.

$$G_I^v(t_1, t_2) \overset{h}{\Longleftrightarrow} G_{II}^v(t_1, t_2) <=> \begin{cases} \text{bi-grafy } G_I^v(t_1, t_2) \\ \text{i } G_{II}^v(t_1, t_2) \text{ są} \\ \text{homeomorficzne} \end{cases} . \tag{1.1}$$

Otrzymane w procesie syntezy struktury topologiczne układów, można podzielić na klasy struktur równoważnych, zaliczając do tej samej klasy, struktury homeomorficzne względem siebie. Tak rozumiana synteza topologiczna struktur kanonicznych bi-grafów układów powinna dać odpowiedź na pytanie — ile różnych typów niehomeomorficznych względem siebie struktur kanonicznych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2)$ można zrealizować mając zadane liczby $n(t_1)$ i $n(t_2)$ poszczególnych rodzajów [slssop] elementów.

Syntezie układów poświęcono wiele prac [1, 3—22]. Należy jednak zwrócić uwagę, że prace te zawierają tylko pewne elementy syntezy topologicznej natomiast stosowane kryteria równoważności nie zawsze są rozumiane w sensie przekształcenia homeomorficznego.

Celem niniejszej pracy było opracowanie takich metod syntezy topologicznej, które pozwoliłyby na generację wszystkich możliwych typów struktur kanonicznych bi-grafów dwójników skladających się z dwóch rodzajów elementów. Stało się to możliwe dzięki opracowaniu w pracy [25] algebraicznych warunków homeomorfizmu grafów rozpatrywanych układów.

Możliwe są dwa podejścia do zagadnienia syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników. Pierwszą procedurę syntezy topologicznej struktur kanonicznych nazwaną metodą przeglądu bezpośredniego. Nazwa metody wynika z faktu, że do generacji wszystkich możliwych bi-grafów układów pretendentów będących sumą teoriomnogościową elementów mono-grafu $G^v(t_1)$ i mono-grafu $G^v(t_2)$ zastosowano znaną w programowaniu dyskretnym metodę przeglądu bezpośredniego [23], polegającą na generacji wszystkich możliwych bi-grafów układów pretendentów $G^v(t_1, t_2)$ jako sumy mnogościowej wszystkich możliwych mono-grafów $G^v(t_1)$ i $G^v(t_2)$.

Drugą procedurę syntezy topologicznej nazwano metodą przeglądu hierarchicznego. Nazwa metody wynika z faktu, że w procesie syntezy topologicznej, nie generowano wszystkich możliwych monografów $G^v(t_1)$ i $G^v(t_2)$, a hierarchicznie sterowano procesem generacji struktur – generując najpierw tylko wybrane klasy struktur kanonicznych unigrafów $G^v(t)$, w których następnie tworzono bi-grafy $G^v(t_1,t_2)$ dwójników.

Celem pierwszej części niniejszej pracy jest przedstawienie procedury syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników metodą przeglądu bezpośredniego. W drugiej części niniejszej pracy przedstawiono procedurę syntezy topologicznej metodą przeglądu hierarchicznego. Można zaproponować następujące etapy syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników metodą przeglądu bezpośredniego.

1. Pierwszy etap dotyczy generacji wszystkich możliwych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2)$ będących sumą teoriomnogościową poszczególnych elementów tworzących mono-grafy $G^v(t_1)$ i $G^v(t_2)$.

2. Wybór z wygenerowanych bi-grafów układów grafów cyklicznie spójnych względem przyjętych wierzchołków wejściowych $\{w_0, w_1\}$.

3. Wybór z cyklicznie spójnych bi-grafów dwójników, tych układów które przy minimalnej liczbie elementów mogą realizować funkcję wymierną $F(t_1, t_2)$ o maksymalnym stopniu licznika i mianownika.

4. Podział cyklicznie spójnych bi-grafów układów o minimalnych liczbach elementów poszczególnych rodzajów $n(t_i)$, na klasy ich struktur kanonicznych.

Tabela 1.

Moce zbiorów otrzymywanych w procesie syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów układów dwójników metodą przeglądu bezpośredniego w zależności od liczby wierzchołków

Nr	Liczba wierzchołków Moce zbiorów	$v = 3$	$v = 4$	$v = 5$
A	B	C	D	E
1	Moc zbioru gałęzi w pełnym unigrafie układu $M = \frac{v(v-1)}{2}$	3	6	10
2	Moce zbiorów mono-grafów $G^v(t_1)$ i $G^v(t_2)$ $M = 2^{\frac{v(v-1)}{2}}$	2^3	2^6	2^{10}
3	Moc zbioru bi-grafów $G^v(t_1, t_2) = G^v(t_1) \cup G^v(t_2)$ $M = 2^{\frac{v(v-1)^2}{2}}$	2^6	2^{12}	2^{20}

A	B	C	D	E
4	Moc zbioru dendrytów 1-drzewowych $M = v^{(v-2)}$	3	16	125
5	Moc zbioru bi-grafów $G^v(t_1, t_2) = T_1^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$ $M = [v^{(v-2)}]^2$	9	256	15625
6	Moc zbioru cyklicznie spójnych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_1^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$	7	194	12038
7	Moc zbiorów cyklicznie spójnych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_1^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$ o danej liczbie gałęzi w ich unigrafie	$M_2=1$ $M_3=6$	$M_3=2$ $M_4=60$ $M_5=120$ $M_6=12$	$M_4=6$ $M_5=564$ $M_6=4416$ $M_7=5912$ $M_8=1140$
8	Moc zbioru klas struktur kanonicznych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_1^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$ o danej liczbie gałęzi w ich unigrafie	$M_2=1$ $M_3=3$	$M_3=1$ $M_4=8$ $M_5=19$ $M_6=4$	$M_4=1$ $M_5=15$ $M_6=112$ $M_7=236$ $M_8=76$
9	Moc zbioru klas struktur kanonicznych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_1^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$	4	32	440
10	Moc zbioru dendrytów 2-drzewowych $M = 2v^{(v-3)}$	2	8	50
11	Moc zbioru bi-grafów $G^v(t_1, t_2) = T_2^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$ lub $G^v(t_1, t_2) = T_1^v(t_1) \cup T_2^v(t_2)$	6	128	6250
12	Moc zbioru cyklicznie spójnych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_2^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$ lub $G^v(t_1, t_2) = T_1^v(t_1) \cup T_2^v(t_2)$	4	84	4280
13	Moc zbioru cyklicznie spójnych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_2^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$ lub $G^v(t_1, t_2) = T_1^v(t_1) \cup T_2^v(t_2)$ o danej liczbie gał ich unigrafie	$M_2=1$ $M_3=3$	$M_3=6$ $M_4=52$ $M_5=26$	$M_4=26$ $M_5=768$ $M_6=2446$ $M_7=1040$

A	B	C	D	E
14	Moc zbioru klas struktur kanonicznych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_2^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$ lub $G^v(t_1, t_2) = T_1^v(t_1) \cup T_2^v(t_2)$ o danej liczbie gałęzi w ich unigrafie	$M_2=1$ $M_3=1$	$M_3=1$ $M_4=6$ $M_5=5$	$M_4=1$ $M_5=14$ $M_6=63$ $M_7=48$
15	Moc zbioru klas struktur kanonicznych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_2^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$ lub $G^v(t_1, t_2) = T_1^v(t_1) \cup T_2^v(t_2)$	2	12	126
16	Moc zbioru bi-grafów $G^v(t_1, t_2) = T_2^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$ $M = [2v^{(v-3)}]^2$	4	64	2500
17	Moc zbioru cyklicznie spójnych bi-grafów układu $G^v(t_1, t_2) = T_2^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$	2	32	1352
18	Moc zbioru cyklicznie spójnych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_2^v(t_1) \cup T_2^v(t_2)$ o danej liczbie gałęzi w ich unigrafie	$M_2=2$	$M_3=12$ $M_4=20$	$M_4=72$ $M_5=696$ $M_6=584$
19	Moc zbioru klas struktur kanonicznych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_2^v(t_1) \cup T_2^v(t_2)$ o danej liczbie gałęzi w ich unigrafie	$M_2=1$	$M_3=1$ $M_3=3$	$M_4=1$ $M_5=11$ $M_6=20$
20	Moc zbioru klas struktur kanonicznych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_2^v(t_1) \cup T_2^v(t_2)$	1	4	32

Zanim przejdziemy do przedstawienia poszczególnych etapów syntezy topologicznej dwójników jeszcze jedna uwaga. Jak wiadomo ważną rzeczą w procesie syntezy jest określenie mocy zbiorów uczestniczących na każdym jej etapie. Moce poszczególnych zbiorów policzono bądź teoretycznie, korzystając z teorii grafów [2, 17] lub empirycznie przy pomocy komputera. W tabeli 1 zestawiono moce zbiorów otrzymanych w poszczególnych etapach syntezy topologicznej układów w zależności od liczby ich wierzchołków. Dalej w tekście będą zamieszczone tylko krótkie wyjaśnienia dotyczące sposobu obliczania mocy poszczególnych zbiorów.

1.2. GENERACJA BI-GRAFÓW UKŁADÓW

Pierwszym etapem syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów układów metodą przeglądu bezpośredniego, jest generacja wszystkich bi-grafów układów pretendentów.

Generacja bi-grafów układów pretendentów metodą przeglądu bezpośredniego polega na tym, że sumowanie teoriomnogościowe elementów mono-grafów $G^v(t_1)$ i $G^v(t_2)$ rozpoczyna się od wartości (0, 0,..., 0) mono-grafu $G^v(t_1)$ i wartości (0, 0,..., 0) mono-grafu $G^v(t_2)$, a proces generacji bi-grafów o danych liczbach elementów $n(t_1)$ i $n(t_2)$ kończy się gdy $G^v(t_1)$ osiąga wartość $(t_1, t_1,..., t_1)$ a $G^v(t_2)$ wartość $(t_2, t_2,..., t_2)$. Przykłady wygenerowanych bi-grafów pretendentów $G^v(t_1, t_2)$ zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2

Przykłady struktur bi-grafów układów dwójników składających się z dwóch rodzajów elementów $\{t_1, t_2\}$

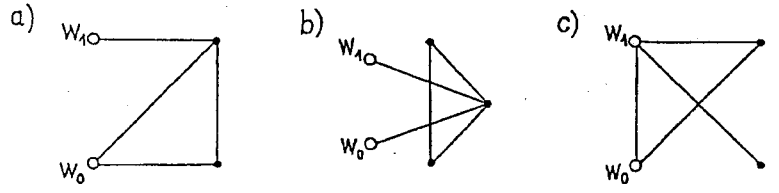
Nr	$G^A(t_1, t_2)$	$Y[LT^v(t_1, t_2)]$	$Y_{n/n}(t_1, t_2)$	Spójność układu	V
A	B	C	D	E	F
1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 t_2	$<\frac{0,1}{0}>$	$Y_{1/0}(t_1, t_2)$	S	2
2	0 0 0 0 0 t_1 0 0 0 0 0 0	$<\frac{1,0}{0}>$	$Y_{1/0}(t_1, t_2)$	S	2
3	0 t_1 0 t_1 t_1 t_1 0 0 0 t_2 0 t_2			N	
4	0 0 0 0 t_1 t_1 t_2 0 t_2 0 0 0	$<\frac{0, 2, 2, 0}{0, 2, 1}>$	$Y_{2/1}(t_1, t_2)$	S	4
5	0 0 t_1 0 t_1 t_1 0 t_2 0 t_2 t_2 0	$<\frac{1, 5, 5, 1}{1, 4, 2}>$	$Y_{3/2}(t_1, t_2)$	S	4
6	0 0 0 t_1 0 t_1 0 0 0 0 t_2 0	$<\frac{1, 2, 0}{0, 1}>$	$Y_{2/1}(t_1, t_2)$	S	3
7	0 t_1 t_1 t_1 0 0 0 t_2 0 0 t_2 0	$<\frac{1, 3, 1, 0}{3, 4, 1}>$	$Y_{3/2}(t_1, t_2)$	S	4
8	t_1 0 0 0 t_1 0 0 t_2 t_2 t_2 0 0	$<\frac{0, 3, 4, 1}{1, 4, 3}>$	$Y_{2/2}(t_1, t_2)$	S	4
9	0 0 t_1 0 0 0 t_2 0 0 0 t_2 t_2	$<\frac{0, 0, 2, 1}{0, 2, 1}>$	$Y_{1/1}(t_1, t_2)$	S	4
10	0 0 0 0 0 t_1 t_2 0 t_2 0 t_2 0	$<\frac{0, 0, 2, 1}{0, 0, 3}>$	$Y_{1/1}(t_1, t_2)$	S	4
11	t_1 0 0 0 0 t_1 0 0 t_2 t_2 t_2 0	$<\frac{0, 3, 4, 1}{0, 3, 2}>$	$Y_{2/1}(t_1, t_2)$	S	4

A	B	C	D	E	F
12	$0\ 0\ t_1\ 0\ t_1\ 0$ $t_2\ 0\ 0\ 0\ t_2\ 0$	$<\frac{0,\ 1,\ 1,\ 0}{1,\ 3,\ 1}>$	$Y_{2/2}(t_1, t_2)$	S	4
13	$0\ 0\ t_1\ t_1\ t_1\ t_1$ $t_2\ t_2\ 0\ t_2\ 0\ t_2$	$<\frac{3,\ 15,\ 14,\ 3}{2,\ 7,\ 2}>$	$Y_{3/2}(t_1, t_2)$	S	4
14	$0\ 0\ t_1\ 0\ 0\ 0$ $t_2\ 0\ 0\ t_2\ t_2\ 0$	$<\frac{0,\ 0,\ 2,\ 1}{0,\ 3,\ 2}>$	$Y_{1/1}(t_1, t_2)$	S	4
15	$t_1\ 0\ t_1\ 0\ 0\ 0$ $t_2\ t_2\ 0\ 0\ 0\ t_2$			N	
16	$0\ t_1\ 0\ 0\ 0\ t_1$ $t_2\ t_2\ 0\ 0\ 0\ 0$	$<\frac{1,\ 2,\ 1}{1,\ 2}>$	$Y_{\cdot,1}(t_1, t_2)$	S	3
17	$t_1\ 0\ 0\ 0\ t_1\ t_1$ $t_2\ 0\ 0\ t_2\ 0\ t_2$			N	
18	$t_1\ 0\ t_1\ 0\ t_1\ 0$ $0\ 0\ 0\ 0\ 0\ t_2$	$<\frac{1,\ 3,\ 0,\ 0}{3,\ 0,\ 0}>$	$Y_{1/0}(t_1, t_2)$	S	4
19	$0\ t_1\ t_1\ t_1\ 0\ 0$ $0\ t_2\ t_2\ t_2\ 0\ 0$	$<\frac{1,\ 3,\ 3,\ 1}{3,\ 6,\ 3}>$	$Y_{3/2}(t_1, t_2)$	S	4
20	$t_1\ 0\ t_1\ 0\ t_1\ 0$ $0\ 0\ t_2\ 0\ 0\ t_2$	$<\frac{1,\ 4,\ 2,\ 0}{3,\ 2,\ 0}>$	$Y_{2/1}(t_1, t_2)$	S	4
21	$t_1\ 0\ t_1\ t_1\ t_1\ 0$ $0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$	$<\frac{3,\ 0,\ 0,\ 0}{5,\ 0,\ 0}>$	$Y_{1/0}(t_1, t_2)$	S	4
22	$t_1\ t_1\ 0\ 0\ 0\ 0$ $0\ 0\ 0\ 0\ 0\ t_2$	$<\frac{1,\ 2,\ 0}{2,\ 0}>$	$Y_{1/0}(t_1, t_2)$	S	3
23	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$ $t_2\ t_2\ t_2\ t_2\ t_2\ t_2$	$<\frac{0,\ 0,\ 0,\ 16}{0,\ 0,\ 8}>$	$Y_{1/0}(t_1, t_2)$	S	4
24	$t_1\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ t_1$ $0\ t_2\ 0\ t_2\ t_2\ t_2$	$<\frac{3,\ 12,\ 12,\ 3}{2,\ 5,\ 7}>$	$Y_{3/2}(t_1, t_2)$	S	4
25	$t_1\ t_1\ t_1\ t_1\ t_1\ t_1$ $t_2\ t_2\ t_2\ t_2\ t_2\ t_2$	$<\frac{16,48,48,16}{8,16,8}>$	$Y_{3/2}(t_1, t_2)$	S	4

Zaproponowana procedura generacji bi-grafów układów ma tę podstawową zaletę, że dodając kolejne elementy $e = t_1 \cup t_2$ tworzy się wszystkie możliwe koniugacje mono-grafów $G^v(t_1)$ i $G^v(t_2)$. Tym samym otrzymujemy wszystkie możliwe konfiguracje układów pretendentów przy danej liczbie elementów. Oczywiście część otrzymanych bi-grafów układów pretendentów to układy niespójne, a zatem przechodzimy do drugiego etapu syntezy topologicznej.

1.3. WYBÓR Z WYGENEROWANYCH BI-GRAFÓW – UKŁADÓW CYKLICZNIE SPÓJNYCH

Jak wiadomo, układy fizyczne nie mogą zawierać *„wiszących"* elementów lub pętli pokazanych na rysunku 1.1 ponieważ elementy te nie uczestniczą w przetwarzaniu sygnału. Wynika stąd, że w procesie syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników, mogą być brane pod uwagę tylko bi-grafy cyklicznie spójne względem przyjętych wierzchołków wejściowych dwójnika.
W tabeli 1.2 (kolumna E) bi-grafy cyklicznie spójnych układów dwójników względem wierzchołków wejściowych $\{w_0, w_1\}$ oznaczono literą „S" a układy nie spójne literą „N".



Rys. 1.1. Rodzaje spójności unigrafów odwzorujących układy dwójników; a) unigraf cyklicznie spójny względem wierzchołków $\{w_0, w_1\}$, b) unigraf spójny, c) unigraf niespójny

Po tych dwóch etapach syntezy topologicznej można by już przystąpić do podziału wygenerowanych cyklicznie spójnych bi-grafów dwójników na klasy ich struktur kanonicznych korzystając z przedstawionych w pracy [25] warunków koniecznych i dostatecznych do stwierdzenia homeomorfizmu dwóch bi-grafów układów.

Wyniki prac dotyczących syntezy układów [1, 3–22] wskazują, że rozwój metod syntezy i projektowania nowych układów, powinien iść głównie w dwóch kierunkach, minimalizacji ich wrażliwości oraz minimalizacji liczby elementów tworzących dany układ. Stąd wydaje się celowe już na etapie generacji wszystkich możliwych cyklicznie spójnych bi-grafów dwójników, wydzielić te układy dwójników które przy minimalnej liczbie elementów obu typów $n(t_1)$ i $n(t_2)$ mogą realizować funkcję wymierną o maksymalnym stopniu licznika i mianownika.

1.4. MINIMALIZACJA LICZB ELEMENTÓW $n(t_i)$ W WYGENEROWANYCH BI-GRAFACH

Jak łatwo zauważyć zamieszczone w tabeli 1.2 przykłady cyklicznie spójnych bi-grafów spójników charakteryzują się one różnymi liczbami dendrytów 1-drzewowych $LT_1^v(t_1^{n11}, t_2^{n21})$ i dendrytów 2-drzewowych $LT_{1,0}^v(t_1^{n11}, t_2^{n21})$ występujących w funkcji strukturalnej $Y[LT^v(t_1, t_2)$ charakteryzującej admitancję wejściową poszczególnych układów [24]. I tak na przykład dwójniki o $v=4$ wierzchołkach mogą realizować admitancję wejściową w postaci funkcji wymiernej typu $Y_{3/2}(t_1, t_2)$ [np. układy o numerach 5, 7, 25] typu $Y_{2/2}(t_1, t_2)$ [np. układy o numerach 8, 12], typu

$Y_{1/1}(t_1, t_2)$ [np. układy o numerach 9, 13], typu $Y_{1/0}(t_1, t_2)$ [np. układy o numerach 10, 23]. Jak wynika z powyższych przykładów poszczególne typy funkcji wymiernej można zrealizować przy użyciu różnej liczby elementów obu typów.

Niżej sformułowano warunki konieczne i dostateczne jakie muszą spełniać mono-grafy $G^v(t_1)$ i $G^v(t_2)$ tworzące bi-graf dwójnika $G^v(t_1, t_2)$, aby realizował on admitancję wejściową w postaci funkcji wymiernej o maksymalnym stopniu licznika i mianownika przy minimalnej liczbie elementów obu typów.

Twierdzenie 1.1

Dwójnik o v wierzchołkach zawierający dwa rodzaje elementów o admitancjach $\{Y_{1i}\ t_1\}$ i $\{Y_{2j}\ t_2\}$ realizuje admitancję wejściową w postaci funkcji wymiernej o maksymalnym stopniu licznika i mianownika typu:

$$Y_{v-1/v-2}(t_1, t_2) = \frac{A_{v-1,0}\, t_1^{v-1} t_2^{0} + A_{v-2,1}\, t_1^{v-2} t_2^{1} + \ldots + A_{1,v-1}\, t_1^{1} t^{v-2} + A_{0,v-1}\, t_1^{0} t_2^{v-1}}{B_{v-2,0}\, t_1^{v-2} t_2^{0} + \ldots \ldots + B_{0,v-2}\, t_1^{0} t_2^{v-2}} \tag{1.2}$$

co w postaci jego funkcji strukturalnej można zapisać:

$$Y[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2)] = \frac{1,\ \mathrm{LT}_1^{\,v}(t_1^{v-2}, t_2^{1}), \ldots \ldots, \mathrm{LT}_1^{\,v}(t_1^{1}, t_2^{v-2}),\ 1}{\mathrm{LT}_{1,0}^{\,v}(t_1^{v-2}, t_2^{0}),\ \mathrm{LT}_{1,0}^{\,v}(t_1^{v-3}, t_2^{1}),\ \ldots,\ \mathrm{LT}_{1,0}^{\,v}(t_1^{1}, t_2^{v-3}),\ \mathrm{LT}_{1,0}^{\,v}(t_1^{0}, t_2^{v-2})} \tag{1.3}$$

przy minimalnych liczbach elementów $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$, jeśli

$$G^v(t_1, t_2) = T_1^{\,v}(t_1) \cup T_1^{\,v}(t_2) \tag{1.4}$$

gdzie:

$T_1^{\,v}(t_1)$ – dendryt 1-drzewowy o v wierzchołkach składający się tylko z elementów typu $\{t_1\}$.

$T_1^{\,v}(t_2)$ – dendryt 1-drzewowy o v wierzchołkach składający się tylko z elementów typu $\{t_2\}$.

Dowód:

Jak wynika z pracy [24] dany parametr charakteryzujący dwójnik zawierającego dwa rodzaje [slssop] elementów $\{t_1, t_2\}$ można zapisać w postaci funkcji wymiernej typu:

$$F_{r/p}(t_1, t_2) = \frac{\sum_{n_{1ka}=0}^{r} A_{n_{1ka}, n_{2ka}} \cdot t_1^{n_{1ka}} \cdot t_2^{n_{2ka}}}{\sum_{n_{1kb}=0}^{p} B_{n_{1kb}, n_{2kb}} \cdot t_1^{n_{1kb}} \cdot t_2^{n_{2kb}}}, \tag{1.5}$$

gdzie:

$$A_{n_{1ka},n_{2ka}} = \sum_{T_k^v(t_1^{n_{1ka}},t_2^{n_{2ka}})}\left[\prod^{n_{1ka}}(Y_{1i})\cdot\prod^{n_{2ka}}(Y_{2j})\right] \tag{1.6}$$

$$B_{n_{1kb},n_{2kb}} = \sum_{T_k^v(t_1^{n_{1kb}},t_2^{n_{2kb}})}\left[\prod^{n_{1kb}}(Y_{1i})\cdot\prod^{n_{2kb}}(Y_{2j})\right] \tag{1.7}$$

Z zależności 1.6 wynika, że $A_{v-1,0}$ jest sumą iloczynów admitancji tylko elementów typu $\{t_1\}$ tworzących dendryt 1-drzewowy, a zatem maksymalny stopień licznika w stosunku do elementów $\{t_1\}$ będzie miał wartość t_1^{v-1}. Analogicznie $A_{0,v-1}$ jest sumą iloczynów admitancji tylko elementów typu $\{t_2\}$ tworzących dendryt 1-drzewowy, a zatem maksymalny stopień licznika w stosunku do elementu $\{t_2\}$ będzie miał wartość t_2^{v-1}. Wynika stąd, że aby licznik wyrażenia 1.5 miał stopień $t_1^{v-1}\cdot t_2^{0}$ dwójnik musi zawierać co najmniej $v-1$ elementów $\{t_1\}$ tworzących minimum jeden dendryt 1-drzewowy składający się tylko z elementów typu $\{t_1\}$.

Analogicznie, aby licznik wyrażenia 1.5 miał stopień $(t_1^{0}\cdot t_2^{v-1})$ dwójnik musi zawierać co najmniej $v-1$ elementów typu $\{t_2\}$ tworzących minimum jeden dendryt 1-drzewowy składający się tylko z elementów typu $\{t_2\}$.

Z definicji dendrytu 2-drzewowego [24] wynika, że jeśli w dwójniku istnieje dendryt 1-drzewowy składający się z $v-1$ elementów typu $\{t_1\}$, to istnieje również co najmniej jeden dendryt 2-drzewowy zawierający $v-2$ elementy typu $\{t_1\}$ a tym samym zgodnie z zależnością (1.7), $B_{v-2,0}>0$. Analogicznie jeśli w dwójniku istnieje dendryt 1-drzewowy składający się z $v-1$ elementów typu $\{t_2\}$, to istnieje również co najmniej jeden dendryt 2-drzewowy zawierający v-2 elementy typu $\{t_2\}$, a tym samym zgodnie z zależnością (1.7), $B_{0,v-2}>0$.

Z założenia że $A_{v-1,0}>0$, $A_{0,v-1}>0$, $B_{v-2,0}>0$, $B_{0,v-2}>0$, oraz zależności (1.6), (1.7) wynika, że $A_{n_{11}n_{21}}>0$ i $B_{n_{12}n_{22}}>0$, dla każdego $n_{11}=0,1,2,\ldots,v-1$ i $n_{21}=v-1-n_{11}$, oraz $n_{12}=0,1,\ldots,v-2$ i $n_{22}=v-1-n_{12}$.
Są to warunki konieczne aby admitancja wejściowa dwójnika miała postać funkcji wymiernej typu $Y_{v-1/v-2}(t_1, t_2)$. Warunkiem dostatecznym aby dwójnik realizował funkcję wymierną typu $Y_{v-1/v-2}(t_1, t_2)$ przy minimalnej liczbie elementów obu typów jest minimalna liczba dendrytów 1-drzewowych czyli $LT_1^v(t_1^{v-1}, t_2^{0})=1$ oraz $LT_1^v(t_1^{0}, t_2^{v-1})=1$.

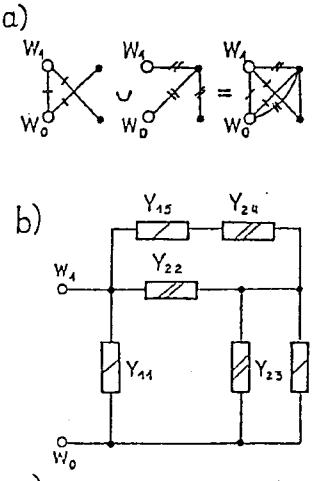
Aby były spełnione powyższe warunki dwójnik musi zawierać tylko $v-1$ elementów typu $\{t_1\}$ tworzących dendryt 1-drzewowy $T_1^v(t_1)$, (tym samym $LT_1^v(t_1^{v-1}, t_2^{0}=1)$ oraz zawierać tylko $v-1$ elementów typu $\{t_2\}$ tworzących dendryt 1-drzewowy $T_1^v(t_1)$, (tym samym $LT_1^v(t_1^{0}, t_2^{v-1})=1$).

Na rysunku 1.2 pokazano przykład dwójnika będącego sumą teoriomnogościową $G^v(t_1, t_2)=T_v(t_1)\cup T_1^v(t_2)$.

Należy zwrócić uwagę (tabela 1.2), że oprócz dwójników o minimalnej liczbie elementów obu typów charakteryzujących się admitancją wejściową $Y_{v-1/v-2}(t_1, t_2)$, istnieją również dwójniki, dla których w charakteryzujących je dwójkach uporządkowanych zbiorów $Y[LT^v(t_1, t_2)]$ mamy: $LT_1^v(t_1^{v-1}, t_2^{0})=0$ — np. układ o $N^0=8$,

$LT_1^{v}(t_1^{0}, t_2^{v-1})=0$ – np. układ o $N^{0}-7$, oraz $LT_1^{v}(t_1^{v-1}, t_2^{0})=0$ i $LT_1^{v}(t_1^{0}, t_2^{v-1})=0$ – np. układ o $N^{0}=12$.

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na współzależność konfiguracji dendrytu 1-drzewowego i dendrytu 2-drzewowego danego grafu. Z definicji dendrytu



struktura / dendryty	$e_6e_5e_4e_3e_2e_1$ 0 $t_1$0 $t_1$0 t_1 0 0 $t_2t_2t_2$0	$LT^4(t_1,t_2)$	$LT^4(t_2)$
$T_1^4(t_1^3t_1^0t_2^0)$	0 $t_1$0 $t_1$0 t_1	1	13
$T_1^4(t_1^2t_1^1t_2^1)$	0 0 $t_2t_1$0 t_1 0 $t_1$0 0 t_2t_1 0 $t_1$0 $t_2$0 t_1 0 $t_2t_2$0 0 t_1 0 $t_1$0 $t_1t_2$0 0 $t_1t_2t_1$0 0	6	
$T_1^4(t_1^1t_1^2t_2^1)$	0 0 $t_2$0 t_2t_1 0 0 $t_2t_2$0 t_1 0 0 $t_2t_1t_2$0 0 $t_1$0 $t_2t_2$0 0 $t_1t_2t_2$0 0	5	
$T_1^4(t_1^0t_1^3t_2^0)$	0 0 $t_2t_2t_2$0	1	
$T_{1,0}^4(t_1^2t_1^0t_2^0)$	0 $t_2$0 $t_2$0 0	1	7
$T_{1,0}^4(t_1^1t_1^1t_2^1)$	0 0 $t_2t_1$0 0 0 $t_1$0 0 $t_2$0 0 $t_1$0 $t_2$0 0 0 $t_1t_2$0 0 0	4	
$T_{1,0}^4(t_1^0t_1^1t_2^2)$	0 0 $t_2$0 $t_2$0 0 0 $t_2t_2$0 0	2	

Rys. 1.2. Przykład układu dwójnika $G^4(t_1, t_2)=T_1^4(t_1)\cup T_1^4(t_2)$; a) jego bi-graf, b) schemat ideowy, c) admitancje strukturalne jego bi-grafu i multigrafu, tabela – dendryty k-drzewowe konieczne do określania jego parametrów

2-drzewowego wynika, że dendrytu 2-drzewowego to dendryt 1-drzewowy danego grafu, w którym scalono odpowiednie wierzchołki. Dendryt 2-drzewowy jest zatem fragmentem tylko tych dendrytów 1-drzewowych danego grafu, które zawierają gałęzie między wierzchołkami scalonymi w trakcie tworzenia dendrytu 2-drzewowego.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że obecność gałęzi lub jej brak między wierzchołkami wejściowymi $\{w_0, w_1\}$ dwójnika nie ma wpływu na wartości $LT_0^{v}(t_1^{n12}, t_2^{n22})$ występujących w funkcji strukturalnej charakteryzujących $Y[LT^{v}(t_1, t_2)]$. To spostrzeżenie jest podstawą do sformułowania trzech twierdzeń określających trzy typy struktur kanonicznych bi-grafów dwójników które przy minimalnych liczbach elementów obu rodzajów realizują admitancję wejściową w postaci funkcji wymiernej o maksymalnym stopniu licznika i mianownika.

Twierdzenie 1.2.

Dwójnik o v wierzchołkach zawierający dwa rodzaje elementów o admitancjach $\{Y_{1i}\ t_1\}$ i $\{Y_{2j}\ t_2\}$ realizuje admitancję wejściową w postaci funkcji wymiernej o maksymalnym stopniu licznika i mianownika typu:

$$Y_{v-2/v-2}(t_1, t_2) = \frac{A_{v-2,1}\, t_1^{v-2} t_2^{1} + \ldots + A_{1,v-1}\, t_1^{1} t^{v-2} + A_{0,v-1}\, t_1^{0} t_2^{v-1}}{B_{v-2,0}\, t_1^{v-2} t_2^{0} + \ldots \ldots + B_{0,v-2}\, t_1^{0} t_2^{v-2}} \tag{1.8}$$

co w postaci jego funkcji strukturalnej można zapisać:

$$Y[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2)] = \frac{0,\ \mathrm{LT}_1{}^v(t_1^{v-2},\ t_2^{1}),\ \ldots\ \ldots,\ \mathrm{LT}_1{}^v(t_1^{1},\ t_2^{v-2}),\ 1}{1,\ \mathrm{LT}_{1,0}{}^v(t_1^{v-3},\ t_2^{1}),\ldots,\mathrm{LT}_{1,0}{}^v(t_1^{1},\ t_2^{v-3}),\ \mathrm{LT}_{1,0}{}^v(t_1^{0},\ t_2^{v-2})} \tag{1.9}$$

przy minimalnych liczbach elementów $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$, jeśli

$$G^v(t_1, t_2) = T_{1,0}{}^v(t_1) \cup T_1{}^v(t_2), \tag{1.10}$$

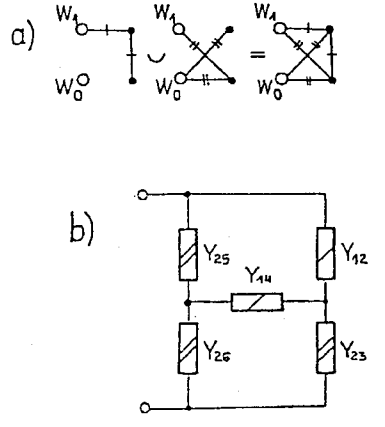
gdzie:

$T_{1,0}{}^v(t_1)$ — dendryt 2-drzewowy składający się tylko z elementów typu $\{t_1\}$.

Dowód:

Dla dwójnika zawierającego $v-2$ elementy typu $\{t_1\}$ które tworzą dendryt 2-drzewowy $T_{1,0}{}^v(t_1)$ z zależności (1.6) oraz definicji dendrytu 2-drzewowego wynika, że: $A_{v-1,0}=0$; $\mathrm{LT}_{1,0}{}^v(t_1^{v-1},\ t_2^{0})=0$ a tym samym $\mathrm{LT}_{1,0}{}^v(t_1^{v-2},\ t_2^{0})=1$. Pozostała część dowodu jak w twierdzeniu 1.1.

Na rysunku 1.3 pokazano przykład dwójnika będącego sumą teoriomnogościową $G^v(t_1, t_2)=T_{1,0}{}^v(t_1)\cup T_1{}^v(t_2)$.



struktura / dendryty	$e_6e_5e_4e_3e_2e_1$	$\mathrm{LT}^4(t_1,t_2)$	$\mathrm{LT}^4(t_2)$
	0 0 t_1 0 t_1 0 / t_2 t_2 0 t_2 0 0		
$T_1^4(t_1^3,t_2^0)$		0	8
$T_1^4(t_1^2,t_2^1)$	0 0 t_1 t_2 t_1 0 / t_2 0 t_1 0 t_1 0	2	
$T_1^4(t_1^1,t_2^2)$	0 t_1 0 t_2 t_1 0 / t_2 0 0 t_2 t_1 0 / t_2 t_2 0 0 t_1 0 / 0 t_2 t_1 t_2 0 0 / t_2 t_2 t_1 0 0 0	5	
$T_1^4(t_1^0,t_2^3)$	t_2 t_2 0 t_2 0 0	1	
$T_{1,0}^4(t_1^2,t_2^0)$	0 0 t_1 0 t_1 0	1	7
$T_{1,0}^4(t_1^1,t_2^1)$	0 t_2 0 0 t_1 0 / t_2 0 0 0 t_1 0 / 0 t_2 t_1 0 0 0 / t_2 0 t_1 0 0 0	4	
$T_{1,0}^4(t_1^0,t_2^2)$	0 t_2 0 t_2 0 0 / t_2 0 0 t_2 0 0	2	

Rys. 1.3. Przykład układu dwójnika $G^4(t_1, t_2)=T_{1,0}{}^4(t_1)\cup T_1{}^4(t_2)$; a) jego bi-graf b) schemat ideowy, c) admitancje strukturalne jego bi-grafu i multigrafu, tabela — dendryty k-drzewowe konieczne do określania jego parametrów

Twierdzenie 1.3

Dwójnik o v wierzchołkach zawierający dwa rodzaje elementów o admitancjach $\{Y_{1i}\ t_1\}$ i $\{Y_{2j}\ t_2\}$ realizuje admitancję wejściową w postaci funkcji wymiernej o maksymalnym stopniu licznika i mianownika typu:

$$Y_{v-1/v-2}(t_1, t_2) = \frac{A_{v-1,0}\, t_1^{v-1} t_2^{0} + A_{v-2,1}\, t_t^{v-2} t_2^{1} + \ldots + A_{1,v-1}\, t_1^{1} t^{v-2}}{B_{v-2,0}\, t_1^{v-2} t_2^{0} + \ldots \ldots + B_{0,v-2}\, t_1^{0} t_2^{v-2}} \tag{1.11}$$

co w postaci jego funkcji strukturalnej można zapisać:

$$Y[\mathrm{LT}^{v}(t_1, t_2)] = \frac{1,\ \mathrm{LT}_1{}^{v}(t_1^{v-2},\ t_2^{1}),\ldots\ \ldots,\ \mathrm{LT}_1{}^{v}(t_1^{1},\ t_2^{v-2}),\ 0}{\mathrm{LT}_{1,0}{}^{v}(t_1^{v-2},\ t_2^{0}),\ \mathrm{LT}_{1,0}{}^{v}(t_1^{v-3},\ t_2^{1}).\ldots,\mathrm{LT}_{1,0}{}^{v}(t_1^{1},\ t_2^{v-3}),\ 1} \tag{1.12}$$

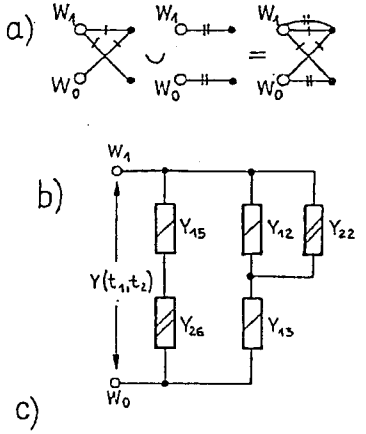
przy minimalnych liczbach elementów $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$, jeśli:

$$G^{v}(t_1, t_2) = T_1{}^{v}(t_1) \cup T_{1,0}{}^{v}(t_2), \tag{1.13}$$

gdzie:

$T_{1,0}{}^{v}(t_2)$ – dendryt 2-drzewowy składający się tylko z elementów typu $\{t_2\}$.

Dowód:



struktura / dendryty	$e_6e_5e_4e_3e_2e_1$ $0\ t_1 0\ t_1 t_1 0$ $t_2 0\ 0\ 0\ t_2 0$	$\mathrm{LT}^4(t_1,t_2)$	$\mathrm{LT}^4(t_2)$
$T_1^4(t_{1,1}^3 t_2^0)$	$0\ t_1 0\ t_1 t_1 0$	1	7
$T_1^4(t_{1,1}^2 t_2^1)$	$t_2 0\ 0\ t_1 t_1 0$ $t_2 t_1 0\ 0\ t_1 0$ $0\ t_1 0\ t_1 t_2 0$ $t_2 t_1 0\ t_1 0\ 0$	4	
$T_1^4(t_{1,1}^1 t_2^2)$	$t_2 0\ 0\ t_1 t_2 0$ $t_2 t_1 0\ 0\ t_2 0$	2	
$T_1^4(t_{1,1}^0 t_2^0)$		0	
$T_{1,0}^4(t_{1,1}^2 t_2^0)$	$0\ t_1 0\ 0\ t_1 0$ $0\ t_1 0\ t_1 0\ 0$	2	6
$T_{1,0}^4(t_{1,1}^1 t_2^1)$	$t_2 0\ 0\ 0\ t_1 0$ $t_2 0\ 0\ t_1 0\ 0$ $0\ t_1 0\ 0\ t_2 0$	3	
$T_{1,0}^4(t_{1,1}^0 t_2^2)$	$t_2 0\ 0\ 0\ t_2 0$	1	

Rys. 1.4. Przykład układu dwójnika $G^4(t_1, t_2) = T_1{}^4(t_1) \cup T_{1,0}{}^4(t_2)$; a) jego bi-graf, b) schemat ideowy, c) admitancje strukturalne jego bi-grafu i multigrafu, tabela – dendryty k-drzewowe konieczne do określenia jego parametrów

Dla dwójnika zawierającego $v-2$ elementy typu $\{t_2\}$ które tworzą jeden dendryt 2-drzewowy $T_{1,0}{}^{v}(t_2)$ z zależności (1.6) oraz definicji dendrytu 2-drzewowego wynika, że: $A_{0,v-1}=0$; $\mathrm{LT}_{1,0}{}^{v}(t_1{}^{0},\ t_2{}^{v-1})=0$ a tym samym $\mathrm{LT}_{1,0}{}^{v}(t_1{}^{0},\ t_2{}^{v-2})=1$. Pozostała część dowodu jak w twierdzeniu 1.1.

Na rysunku 1.4 pokazano przykład dwójnika będącego sumą teoriomnogościową $G^v(t_1, t_2)=T_1{}^v \cup T_{1,0}{}^v(t_2)$.

Twierdzenie 1.4.

Dwójnik o v wierzchołkach zawierający dwa rodzaje elementów o admitancjach $\{Y_{1i}\ t_1\}$ i $(Y_{2j}\ t_2\}$ realizuje admitancję wejściową w postaci funkcji wymiernej o maksymalnym stopniu licznika i mianownika typu:

$$Y_{v-2/v-2}(t_1, t_2) = \frac{A_{v-2,1}\, t_1{}^{v-2} t_2{}^1 + \ldots + A_{1,v-1}\, t_1{}^1 t^{v-2}}{B_{v-2,0}\, t_1{}^{v-2} t_2{}^0 + \ldots \ldots + B_{0,v-2}\, t_1{}^0 t_2{}^{v-2}} \tag{1.14}$$

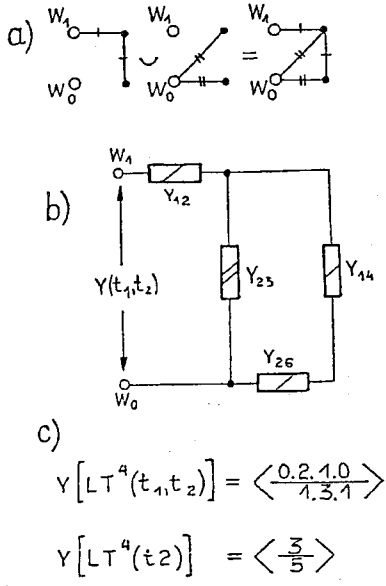
co w postaci jego funkcji strukturalnej można zapisać:

$$Y[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2) = \frac{0,\ \mathrm{LT}_1{}^v(t_1{}^{v-2},\ t_2{}^1),\ldots\ \ldots,\mathrm{LT}_1{}^v(t_1{}^1,\ t_2{}^{v-2}),\ \mathrm{o}}{1,\ \mathrm{LT}_{1,0}{}^v(t_1{}^{v-3},\ t_2{}^1),\ldots,\mathrm{LT}_{1,0}{}^v(t_1{}^1,\ t_2{}^{v-3}),\ 1} \tag{1.15}$$

przy minimalnych liczbach elementów $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$, jeśli

$$G^v(t_1, t_2) = T_{1,0}{}^v(t_1) \cup T_{1,0}{}^v(t_2). \tag{1.16}$$

Dowód:



struktura / dendryty	$e_6e_5e_4e_3e_2e_1$	$LT^4(t_1,t_2)$	$LT^4(t_2)$
	0 0 t_1 0 t_1 0 t_2 0 0 t_2 0 0		
$T_1^4(t_1^3 t_2^0)$		0	3
$T_1^4(t_1^2 t_2^1)$	0 0 $t_1 t_2 t_1$ 0 t_2 0 t_1 0 t_1 0	2	
$T_1^4(t_1^1 t_2^2)$	t_2 0 0 $t_2 t_1$ 0	1	
$T_1^4(t_1^0 t_2^3)$		0	
$T_{1,0}^4(t_1^2 t_2^0)$	0 0 t_1 0 t_1 0	1	5
$T_{1,0}^4(t_1^1 t_2^1)$	t_2 0 0 0 t_1 0 0 0 $t_1 t_2$ 0 0 t_2 0 t_1 0 0 0	3	
$T_{1,0}^4(t_1^0 t_2^2)$	t_2 0 0 t_2 0 0	1	

Rys. 1.5. Przykład układu dwójnika $G^4(t_1, t_2)=T_{1,0}{}^4(t_1)\cup T_{1,0}{}^4(t_2)$; a) jego bi-graf, b) schemat ideowy, c) admitancje strukturalne jego bi-grafu i multigrafu, tabela — dendryty k-drzewowe konieczne do określenia jego parametrów

Dla dwójnika zawierającego $v-2$ elementy typu $\{t_1\}$ które tworzą jeden dendryt 2-drzewowy $T_{1,0}{}^v(t_1)$, oraz $v-2$ elementy typu $\{t_2\}$ które tworzą jeden dendryt 2-drzewowy $T_{1,0}{}^v(t_2)$, z zależności 1.6 i definicji dendrytu 2-drzewowego wynika, że:

$A_{v-1,0}=0$; $LT_1{}^v(t_1{}^{v-1}, t_2{}^0)=0$; oraz $A_{0,v-1}=0$; $LT_1{}^v(t_1{}^0, t_2{}^{v-1})=0$; a tym samym $LT_{1,0}{}^v(t_1{}^{v-2}, t_2{}^0)=1$, $LT_{1,0}{}^v(t_1{}^0, t_2{}^{v-2})=1$. Pozostała część dowodu jak w twierdzeniu 1.1.

Na rysunku 1.5 pokazano przykład dwójnika będącego sumą teoriomnogościową $G^v(t_1, t_2)=T_{1,0}{}^v(t_1)\cup T_{1,0}{}^v(t_2)$.

1.5. PODZIAŁ BI-GRAFÓW DWÓJNIKÓW NA KLASY ICH STRUKTUR KANONICZNYCH

Ostatnim etapem syntezy topologicznej jest podział wygenerowanych cyklicznie spójnych bi-grafów dwójników o minimalnych liczbach elementów $n(t_1)$ i $n(t_2)$ na klasy ich struktur kanonicznych. Moce zbiorów cyklicznie spójnych bi-grafów dwójników o minimalnych liczbach elementów $n(t_1)$ i $n(t_2)$ realizujących dany typ funkcji $Y_{wp}(t_1, t_2)$ wymiernej o maksymalnym stopniu licznika i mianownika (tw. 1.1 – 1.4) , obliczono empirycznie i zestawiono w tabeli 4.1. Należy zwrócić uwagę, że aby stwierdzić homeomorfizm bi-grafów układów należy zgodnie z twierdzeniem 2 [25] spełnić cztery warunki. Jeśli stwierdzenie pierwszych trzech warunków jest stosunkowo proste, to stwierdzenie czwartego wymaga porównania ich funkcji strukturalnej charakteryzującej dany parametr rozpatrywanych układów.

W ogólnym przypadku porównania $Y[LT^v(t_1, t_2)]$ funkcji strukturalnych M układów znajdujących się w danej grupie wymaga M! operacji porównań. Jak wynika z tabeli 1.1 liczba porównań już dla bi-grafów dwójników o $v=5$ wierzchołkach jest bardzo duża np. dla $G^5(t_1, t_2)=T_1{}^5(t_1)\cup T_1{}^5(t_2)$ wynosi M!=12038! (tabela 1.1). Tak więc operacja porównania funkcji strukturalnych charakteryzujących admitancję wejściową $Y[LT^v(t_1, t_2)]$ bi-grafów dwójników, wymaga komputera o dużej mocy obliczeniowej.

Można oczywiście zaproponować różne częściowe sposoby wstępnej minimalizacji liczby porównań. Można na przykład w pierwszym etapie podzielić otrzymane dwójniki ze względu na liczbę gałęzi równoległych w ich bi-grafie, czyli podział na klasy unigrafów o danej liczbie gałęzi, co ilustruje tabela 1.2 ($N^0=7, 13, 18$). Niestety liczba porównań w danej grupie dalej pozostaje duża szczególnie dla układów o $v>5$ wierzchołkach.

Aby uniknąć porównania takich dużych ilości funkcji strukturalnych charakteryzujących dany parametr dwójników które spełniają warunki konieczne homeomorfizmu, w drugiej części niniejszej pracy przedstawiono nową oryginalną metodę syntezy topologicznej, którą nazwano metodą przeglądu hierarchicznego.

PODSUMOWANIE

Do najważniejszych rezultatów niniejszej pracy można zaliczyć: Wykazanie jakie warunki muszą spełniać mono-grafy $G^v(t_1)$ i $G^v(t_2)$ tworzące uklad dwójnika $G^v(t_1, t_2)=G^v(t_1)\cup G^v(t_2)$, aby mógł on realizować admitancję wejściową w postaci

Tabela 1.3

Typy struktur kanonicznych bi-grafów układów dwójników o minimalnych liczbach elementów $n(t_1)$ i $n(t_2)$ realizujących funkcję wymierną $F(t_1, t_2)$ o maksymalnym stopniu licznika i mianownika

Nr	$LT_k^v(t_1, t_2)$ $G^4(t_1, t_2)$	$LT_1^v(t_1^{n11}, t_2^{n21})$		$LT_{1,0}^v(t_1^{n12}, t_2^{n22})$	
		$n_{11}=v-1$ $n_{21}=0$	$n_{11}=0$ $n_{21}=v-1$	$n_{12}=v-2$ $n_{22}=0$	$n_{12}=0$ $n_{22}=v-2$
1	$T_1^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$	x	x	1	1
2	$T_1^v(t_1) \cup T_2^v(t_2)$	x	1	1	0
3	$T_2^v(t_1) \cup T_1^v(t_2)$	1	x	0	1
4	$T_2^v(t_1) \cup T_2^v(t_2)$	1	1	0	0

x>1

funkcji wymiernej o maksymalnym stopniu licznika i mianownika przy minimalnej liczbie elementów obu typów (tw. 1.1÷1.4).

Należy zwrócić uwagę na charakteryzstyczne wartości liczb dendrytów k-drzewowych występujących w funkcjach strukturalnych $Y[LT^v(t_1, t_2)]$ charakteryzujących admitancję wejściową w postaci funkcji wymiernej o maksymalnym stopniu licznika i mianownika przy minimalnej liczbie elementów obu typów. Uwaga ta dotyczy wartości liczb dendrytów $k-$drzewowych typu $LT_k^v(t_1^{v-k}, t_2^0)$ i $LT_k^v(t_1^0, t_2^{v-k})$, (gdzie $k=1$ v 2) które *„ograniczają"* uporządkowane zbiory $<LT_k^v(t_1^{n1k}, t_2^{n2k})>$ występujące w funkcji strukturalnej $Y[LT^v(t_1, t_2)]$. Otrzymane rezulaty obrazuje tabela 1.3.

BIBLIOGRAFIA

1. R. B i e r n a c k i: *Synteza dwójników RC o różnych postaciach kanonicznych.* Archiwum Elektroniki, 1976, t. XXV, z. 2, ss. 305–315
2. N. D e o: *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce.* Warszawa: PWN, 1980
3. S. D y m o w s k i: *O teorii syntezy liniowych pasywnych czwórników RC o strukturach kanonicznych.* Prace naukowe, Elektronika, z. 2, Wyd. Pol. Warszawskiej, Warszawa: 1971
4. R. M. F o s t e r, E. L. L a n d e n h e i m: *A class of biquadratic impedance.* IEEE. Trans. Circuit Theory, 1963, vol. CT–10, pp. 262–265
5. R. M. F o s t e r: *Biquadratic impedances realizable by a five-element bridges.* IEEE. Trans. Circuit Theory, 1963, vol. CT–10, pp. 363–367
6. R. M. F o s t e r, S. S e s h u: *Minimum biquadratic impedances.* IEEE. Trans. Circuit Theory, 1963, vol. CT–10, pp. 527–528
7. I. W. G i e r a s i m o w: *Teoria projektirowanie i primienienie wycislitielno-prieobrazowatielnych ciepiej (sintez i primienienia).* Rozprawa habilitacyjna, Leningradzki Instytut Elektrotechniki, Leningrad: 1986
8. I. W. G u r i e w i c z: *Sintez paramietriczieskich funkcjonalnych struktur.* Moskwa: Swiaz, 1977
9. A. S. K a u s z a n s k i: *Sintez dwupolusnikow s minimalnym cislom elementow.* Moskwa: Swiaz, 1973
10. E. L. L a n d e n h e i m: *A special biquadratic structure.* IEEE. Trans. Circuit Theory, 1963, vol. CT–10, pp. 455–456

11. E. L. Landenheim: *Three-reactive five-element biquadratic structures.* IEEE. Trans. Circuit Theory, 1964, vol. CT–11, pp. 88–98
12. A. A. Lanne i inni: *Optimalnaja realizacja liniejnych RLC schiem.* Kijów: Naukowaja dumka, 1982
13. K. Mikołajuk, Z. Trzaska: *Elektrotechnika teoretyczna – analiza i synteza elektrycznych obwodów liniowych.* Warszawa: PWN, 1984
14. B. Peikeri: *Fundamentals of network analysis and synthesis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974
15. M. S. Piekarski: *Wybrane zagadnienia syntezy liniowych układów mikroelektronicznych.* Prace naukowe Inst. Telekomunikacji i Akustyki, nr 24, Wyd. Pol. Wrocławskiej, Wrocław: 1976
16. M. Ryglewicz: *Synteza dwójników RC w uogólnionych strukturach kanonicznych szeregowo-równoległych.* Archiwum Elektrotechniki, 1976, t. XXV, z. 3, ss. 637–648
17. M. N. S. Swamy, K. Thulasiraman: *Graphs, networks and algorithms.* New York: Wiley – Interscince, 1981
18. S. Tirtiprodio: *Series-parallel six-element synthesis of the biquadratic impedances.* IEEE. Trans. Circuit Theory, 1971, vol. CT–18, pp. 293–294
19. W. I. Usynin: *Struktura mnożiestwa ciepiej.* Kijów, Wiszcza szkola, 1980
20. C. G. Vasilin: *Three-reactive five-element biquadratic structures.* IEEE. Trans. Circuit Theory, 1969, vol. CT–16, pp. 99–100
21. C. G. Vasilin: *Series-parallel six-element synthesis of the biquadratic impedances.* IEEE. Trans. Circuit Theory, 1970, vol. CT–17, pp. 115–121
22. C. G. Vasilin: *Four-reactive six-element biquadratic structures.* IEEE. Trans. Circuit Theory, 1972, vol. CT–19, pp. 530–531
23. S. Walukiewicz: *Programowanie dyskretne.* Warszawa: PWN, 1986
24. Z. Wróbel: *Funkcje strukturalne grafów układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów.* Kwartalnik El. i Tel. 1991, 37, z. 1–2
25. Z. Wróbel: *Homeomorfizm grafów układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów.* Kwart. El. i Tel. 1991, 37, z. 1–2
26. Z. Wróbel, I. W. Gierasimow: *Układy dwójników składające się z dwóch rodzajów elementów jako funkcjonalne przetworniki sygnału.* Kwart. El. i Tel. (w druku)
27. Z. Wróbel: *Synteza topologiczna struktur kanonicznych grafów dwójników i czwórników.* Prace Wydz. Techniki, Uniwersytet Śląski, Katowice, 1990

Z. WRÓBEL

SYNTHESIS OF CANONICAL STRUCTURES OF BIGRAPHS ONE-PORT CIRCUITS CONSISTING OF TWO KINDS OF ELEMENTS

Part I. Direct reviewing method

Summary

Procedure of topological synthesis of canonical structures by means of direct reviewing method, allowing to generate all possible topological structures of bi-graphs one-port circuits was shown in this paper. It was shown that there are four groups of one-port bi-graphs: $G^v(t_1, t_2)=T_{k_1}{}^v(t_1)\cup T_{k_2}{}^v(t_2)$, for $k_1=1\ v\ 2$, $k_2=1\ v\ 2$ [where: $T_{ki}{}^v(t_i)$ – spanning k-tree containing only the elements of $\{t_1\}$] type of with input admittance $Y(t_1, t_2)$ is the rational function with the maximum degree of numerator and denominator with the minimum number $n(t_1)$ of elements of both kinds $\{t_1\}$ and $\{t_2\}$.

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, z. 1–2, SS. 85–97

621.372.4
621.3.012.1

Synteza struktur kanonicznych bi-grafów dwójników składających się z dwóch rodzajów elementów

ZYGMUNT WRÓBEL

Zakład Elektroniki i Automatyki,
Instytut Problemów Techniki, Uniwersytet Śląski

Otrzymano 1990.05.16
Autoryzowano do druku 1990.11.18

CZĘŚĆ 2. METODA PRZEGLĄDU HIERARCHICZNEGO

W pracy przedstawiono procedurę syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników, pozwalającą wygenerować wszystkie możliwe struktury kanoniczne bi-grafów $\underline{G}(t_1, t_2)$ dwójników. Procedurę syntezy zilustrowano na przykładzie czterech typów bi-grafów dwójników $G^4(t_1, t_2) = T_{k_1}{}^4(t_1) \cup T_{k_2}{}^4(t_2)$, (gdzie: $k_1 = 1 \vee 2$, $k_2 = 1 \vee 2$).

2.1. WSTĘP

Idea syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników metodą przeglądu hierarchicznego oparta jest na dwóch spostrzeżeniach.

1. Jeśli bi-graf dwójnika jest spójny, to również spójny jest jego unigraf.

2. Jeśli bi-grafy dwójników są homeomorficzne, to również homeomorficzne są ich unigrafy.

Pierwsze spostrzeżenie wynika z faktu, że gałęzie równoległe występujące w bi-grafie danego układu nie mają wpływu na jego spójność. Drugie spostrzeżenie wynika z definicji izomorfizmu i 2-izomorfizmu. Należy zwrócić uwagę, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na ich podstawie oraz pierwszego warunku homeomorfizmu dwóch bi-grafów układów (tw. 2 [4]), można zaproponować następujące etapy syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników przeglądu hierarchicznego.

1. Pierwszy etap syntezy topologicznej, to generacja wszystkich możliwych unigrafów układów o zadanej liczbie wierzchołków.

2. Drugi etap syntezy topologicznej, to wybór z wygenerowanych unigrafów układów, tych unigrafów, które są cyklicznie spójne względem przyjętych wierzchołków brzegowych.

3. Trzeci etap syntezy topologicznej jest podział otrzymanych cyklicznie spójnych unigrafów układów na klasy ich struktur kanonicznych.

4. Czwarty etap syntezy topologicznej to wypełnienie jednego przedstawiciela z danej klasy struktur kanonicznych unigrafów układów dwójników — dendrytami k_1-drzewowymi ($k_1 = 1 \; v \, 2$) typu $T_{k_1}{}^v(t_1)$ i dendrytami k_2-drzewowymi ($k_2 = 1 \; v \, 2$) typu $T_{k_2}{}^v(t_2)$, tak aby ich suma teoriomnogościowa była równa danej strukturze kanonicznej unigrafu dwójnika, co można zapisać w postaci:

$$\underline{G}^v(t) = T_{k_1}{}^v(t_1) \cup T_{k_2}{}^v(t_2). \tag{2.1}$$

5. Piąty etap syntezy topologicznej jest podziałem otrzymanych bi-grafów dwójników, na klasy ich struktur kanonicznych. Niżej, na przykładzie dwójników

Tabela 2.1

Moce zbiorów otrzymywanych w procesie syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów układów dwójników metodą przeglądu hierarchicznego w zależności od liczby wierzchołków

Nr	Liczba wierzchołków Moce zbiorów	$v=3$	$v=4$	$v=5$
A	B	C	D	E
1	Moc zbioru gałęzi w pełnym unigrafie układu. $M = \dfrac{v(v-1)}{2}$	3	6	10
2	Minimalna moc zbioru gałęzi w unigrafie układu $M = v - 1$	2	3	4
3	Maksymalna moc zbioru gałęzi w unigrafie układu $M = 2(v-1)$	4	6	8
4	Moc zbioru unigrafów układów	4	42	837
5	Moc zbioru cyklicznie spójnych struktur kanonicznych unigrafów układów	2	8	40
6	Moce zbioru klas struktur kanonicznych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_1{}^v(t_1) \cup T_1{}^v(t_2)$	4	32	440
7	Moce zbioru klas struktur kanonicznych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_2{}^v(t_1) \cup T_1{}^v(t_2)$ lub $G^v(t_1, t_2) = T_2{}^v(t_1) \cup T_1{}^v(t_2)$	2	12	126
8	Moce zbioru klas struktur kanonicznych bi-grafów układów $G^v(t_1, t_2) = T_2{}^v(t_1) \cup T_2{}^v(t_2)$	1	4	32

o $v=4$ wierzchołkach, zilustrowano poszczególne etapy syntezy topologicznej struktur kanonicznych ich bi-grafów metodą przeglądu hierarchicznego.

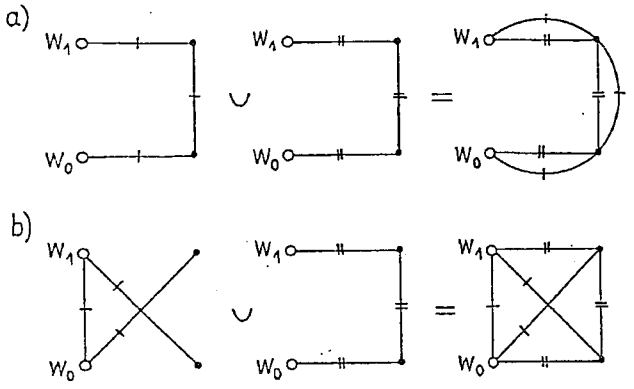
Moce zbiorów otrzymanych w poszczególnych etapach syntezy topologicznej układów dwójników w zależności od liczby ich wierzchołków zestawiono w tabeli 2.1. Dalej w tekście będą zamieszczone tylko krótkie wyjaśnienia dotyczące sposobu obliczania mocy poszczególnych zbiorów.

2.2 GENERACJA WSZYSTKICH MOŻLIWYCH UNIGRAFÓW UKŁADÓW

Pierwszym etapem syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów dwójników, to generacja wszystkich możliwych unigrafów układów o zadanej liczbie wierzchołków. Przystępując do generacji wszystkich możliwych unigrafów układów, należy zwrócić uwagę, że w kolejnym etapie syntezy topologicznej będziemy tworzyć bi-grafy dwójników jako sumę teoriomnogościową $G^v(t_1, t_2)=T_{k1}{}^v(t_1)\cup T_{k2}{}^v(t_2)$. Mając to na uwadze będziemy rozpatrywać wszystkie możliwe unigrafy, lecz tylko te unigrafy, których liczba gałęzi l spełnia zależności:

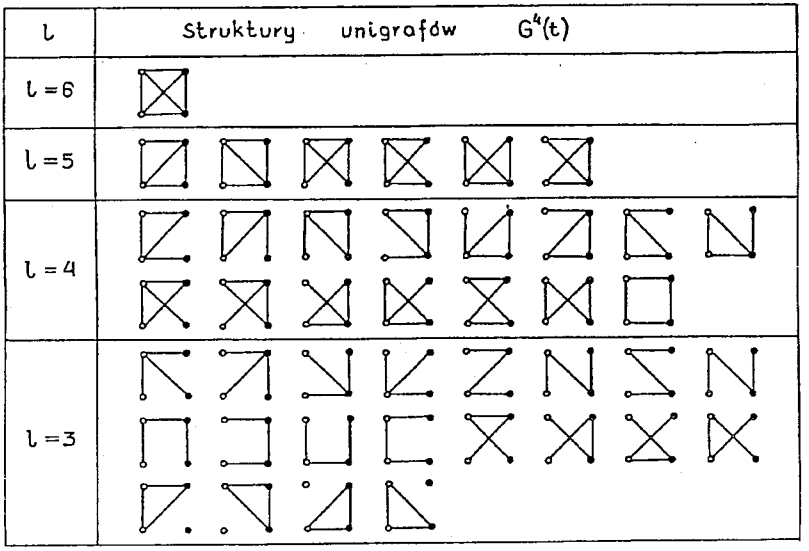
$$v-1 \leqslant 1 \leqslant 2(v-1). \tag{2}$$

Ograniczenie od dołu liczby gałęzi (l) w unigrafie dwójnika wynika z faktu, że unigraf o v wierzchołkach jest cyklicznie spójny względem wierzchołków wejściowych układu jeśli zawiera co najmniej $v-1$ gałęzi łączących wszystkie wierzchołki układu i tworzących ścieżkę której początek i koniec to wierzchołki wejściowe $\{w_0, w_1\}$ układu dwójnika (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Sposób tworzenia bi-grafu układu dwójnika w jego unigrafie: a) o minimalnej liczbie gałęzi, b) o maksymalnej liczbie gałęzi

Ograniczenie od góry liczby gałęzi w unigrafie dwójnika wynika z twierdzenia 1.1 [5]. W przypadku dwójnika który tworzymy jako sumę teoriomnogościową dwóch dendrytów 1-drzewowych $T_1{}^v(t_1)$ i $T_1{}^v(t_2)$ posiadających po $v-1$ elementów odpowiednio typu $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$. Oczywiście $l=2(v-1)$ wtedy i tylko wtedy, kiedy suma teoriomnogościowa dendrytów 1-drzewowych typu $T_1{}^v(t_1)$ i $T_1{}^v(t_2)$ nie tworzy w układzie dwójnika gałęzi równoległych (rys. 1).



Rys. 2.2. Struktury unigrafów $G^4(l)$ w zależności od liczby jego gałęzi $\{l\}$ spełniające warunek $v-1 \leqslant l \leqslant 2\cdot(v-1)$

Na rysunku 2 przedstawiono wszystkie możliwe unigrafy dwójników o $v=4$ wierzchołkach zależność 2. Oczywiście część otrzymanych unigrafów układów pretendentów są unigrafami niespójnymi względem wierzchołków wejściowych $\{w_0, w_1\}$, a zatem przechodzimy do drugiego etapu syntezy topologicznej.

2.3. WYBÓR Z WYGENEROWANYCH UNIGRAFÓW, UKŁADÓW CYKLICZNIE SPÓJNYCH

Korzystając z macierzy ścieżek w tabeli 2 [1] zaprezentowano przykładowo wszystkie cyklicznie spójne względem przyjętych wierzchołków wejściowych $\{w_0, w_1\}$ struktury topologiczne unigrafów dwójników o $v=4$ wierzchołkach.

2.4. PODZIAŁ UNIGRAFÓW DWÓJNIKÓW NA KLASY ICH STRUKTUR KANONICZNYCH

Korzystając z opracowanych w pracy [4] algebraicznych warunków homeomorfizmu unigrafów, zestawione w tabeli 2.2 topologiczne struktury unigrafów dwójników o $v=4$ wierzchołkach, pogrupowano na klasy ich struktur homeomorficznych (zgodnie z kryteriami homeomorfizmu tw. 1. z pracy [4]).

Pierwszym kryterium jest ilość gałęzi l w danym unigrafie dwójnika. Drugim kryterium są liczby strukturalne $LT_k^v[\{e_i\}_{l-1} - \{e_j\}_1]$ charakteryzująca unigrafy dwójników.

Tabela 2.2

Typy struktur kanonicznych cyklicznie spójnych względem wierzchołków $\{w_0, w_1\}$ unigrafów $G^4(t)$ układów dwójników

Nr	$G^4(t)$		$LT_k{}^4(t)$		$LT_2{}^4[\{e_i\}_{1-(k-1)} - \{e_j\}_1]$					1
	struktura	model topol.	$LT_1{}^4$	$LT_{1,0}{}^4$	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	
1	t, t, t, t, t, t		16	8	8	8	8	8	8	6
2	t, t, t, t, t, 0		8	8	5	5	4	5	5	5
3	0, t, t, t, t, t		8	5	4	5	5	5	–	
4	t, 0, t, t, t, t				5	4	5	–	5	
5	t, t, t, 0, t, t				5	–	5	4	5	
6	t, t, t, t, 0, t				–	5	5	5	4	
7	t, t, 0, t, t, t		8	4	5	5	–	5	5	
8	t, t, 0, t, t, 0		4	4	3	3	–	3	3	4
9	t, 0, t, 0, t, t		4	3	3	–	3	–	3	
10	0, t, t, t, 0, t				–	3	3	3	–	
11	0, t, t, t, t, 0		3	5	2	3	2	3	–	
12	t, 0, t, t, t, 0				3	2	2	–	3	
13	t, t, t, 0, t, 0				3	–	2	2	3	
14	t, t, t, t, 0, 0				–	3	2	3	2	
15	0, t, t, t, 0, 0		1	3	–	1	1	1	–	3
16	t, 0, t, 0, t, 0				1	–	1	–	1	

Jak wynika z rysunku 2.2, istnieją 42 struktury unigrafów spełniające warunek 2.2. Natomiast tylko 16 z nich są strukturami topologicznymi unigrafów odwzorowujących dwójniki (tab. 2.2) przy czym tylko 8 z nich — to struktury kanoniczne unigrafów $\underline{G}^4(t)$ dwójników.

2.5. TWORZENIE BI-GRAFÓW W POSZCZEGÓLNYCH KLASACH STRUKTUR KANONICZNYCH UNIGRAFÓW DWÓJNIKÓW

Celem następnego etapu syntezy topologicznej metodą przeglądu hierarchicznego jest wypełnienie jednego przedstawiciela z każdej klasy struktur kanonicznych unigrafów dwójników, dendrytami k-drzewowymi typu $T_{k_1}{}^v(t_1)$ i $T_{k_2}{}^v(t_2)$, (gdzie: $k_1 = 1 \; v \; 2$, $k_2 = 1 \; v \; 2$) tak aby ich suma teoriomnogościowa była równa unigrafowi dwójnika. Procedurę tę można przedstawić w postaci układu równań:

$$T_{k_1}{}^v(t_1) \cap \underline{G}^v(t) = T_{k_1}{}^v(t_1) \tag{2.3}$$

$$T_{k_2}{}^v(t_2) \cap \underline{G}^v(t) = T_{k_2}{}^v(t_2) \tag{2.4}$$

$$T_{k_1}{}^v(t_1) \cup T_{k_2}{}^v(t_2) = \underline{G}^v(t) \tag{2.5}$$

Pierwsze dwa równania dają odpowiedź na pytanie, czy dane dendryty k-drzewowe $T_{k_1}{}^v(t_1)$ i $T_{k_2}{}^v(t_2)$ zawierają te same gałęzie co struktura kanoniczna unigraf $\underline{G}^v(t)$ dwójnika.

Trzecie równanie daje odpowiedź na pytanie, czy utworzony bi-graf zawiera wszystkie gałęzie unigrafu $\underline{G}^v(t)$ dwójnika.

Przykład *„wypełnienia"* losowo wybranego unigrafu dwójnika (unigraf $N^0 = 7$ tabela [2.2, 5] dendrytami 1-drzewowymi typu $T_1{}^4(t_1)$ i $T_1{}^4(t_2)$ ilustruje tabela 2.3 [5].

Otrzymane bi-grafy pogrupowano według dwóch kryteriów:

Pierwszym kryterium jest funkcja strukturalna $Y_{1/1.0}[\mathrm{LT}^v(t2)]$ multigrafu danego dwójnika.

Drugim kryterium — funkcja strukturalna $Y[\mathrm{LT}^4(t_1, t_2)]$ charakteryzująca admitancję wejściową bi-grafu dwónika.

Tabela 2.3

Przykład tworzenia bi-grafów układów dwójników w strukturze kanonicznej unigrafu $\underline{G}^4(t) = t, t, 0, t, t, t$

Nr	Struktura bi-grafu		Funkcje strukturalne bi-grafu		
	$G^4(t_1, t_2)$	model topol.	$<\frac{\mathrm{LT}_1{}^4(t_1, t_2)}{\mathrm{LT}_{1.0}{}^4(t_1, t_2)}>$	$<\frac{\mathrm{LT}_1{}^4(t2)}{\mathrm{LT}_{1.0}{}^4(t2)}>$	$<\frac{\mathrm{LT}_1(t)}{\mathrm{LT}_{1.0}{}^4(t)}>$
A	B	C	D	E	F
1	$0\ t_1\ 0\ 0\ t_1\ t_1$ $t_2\ 0\ 0\ t_2\ t_2\ 0$		$<\frac{1, 5, 6, 1}{1, 3, 2}>$	$<\frac{13}{6}>$	$<\frac{8}{4}>$

A	B	C	D	E	F
2	$t_1\ 0\ 0\ 0\ t_1\ t_1$ $0\ t_2\ 0\ t_2\ t_2\ 0$				
3	$0\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ t_1$ $t_2\ 0\ 0\ t_2\ t_2\ 0$				
4	$t_1\ 0\ 0\ t_1\ 0\ t_1$ $0\ t_2\ 0\ t_2\ t_2\ 0$				
5	$t_1\ 0\ 0\ t_1\ 0\ t_1$ $t_2\ t_2\ 0\ 0\ t_2\ 0$				
6	$t_1\ 0\ 0\ 0\ t_1\ t_1$ $t_2\ t_2\ 0\ t_2\ 0\ 0$				
7	$0\ t_1\ 0\ 0\ t_1\ t_1$ $t_2\ t_2\ 0\ t_2\ 0\ 0$				
8	$0\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ t_1$ $t_2\ t_2\ 0\ 0\ t_2\ 0$				
9	$0\ t_1\ 0\ t_1\ t_1\ 0$ $t_2\ 0\ 0\ 0\ t_2\ t_2$		$<\frac{1,\ 5,\ 6,\ 1}{1,\ 3,\ 2}>$		
10	$0\ t_1\ 0\ t_1\ t_1\ 0$ $t_2\ 0\ 0\ t_2\ 0\ t_2$				
11	$t_1\ 0\ 0\ t_1\ t_1\ 0$ $0\ t_2\ 0\ 0\ t_2\ t_2$				
12	$t_1\ 0\ 0\ t_1\ t_1\ 0$ $0\ t_2\ 0\ t_2\ 0\ t_2$				
13	$t_1\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ 0$ $t_2\ 0\ 0\ 0\ t_2\ t_2$				

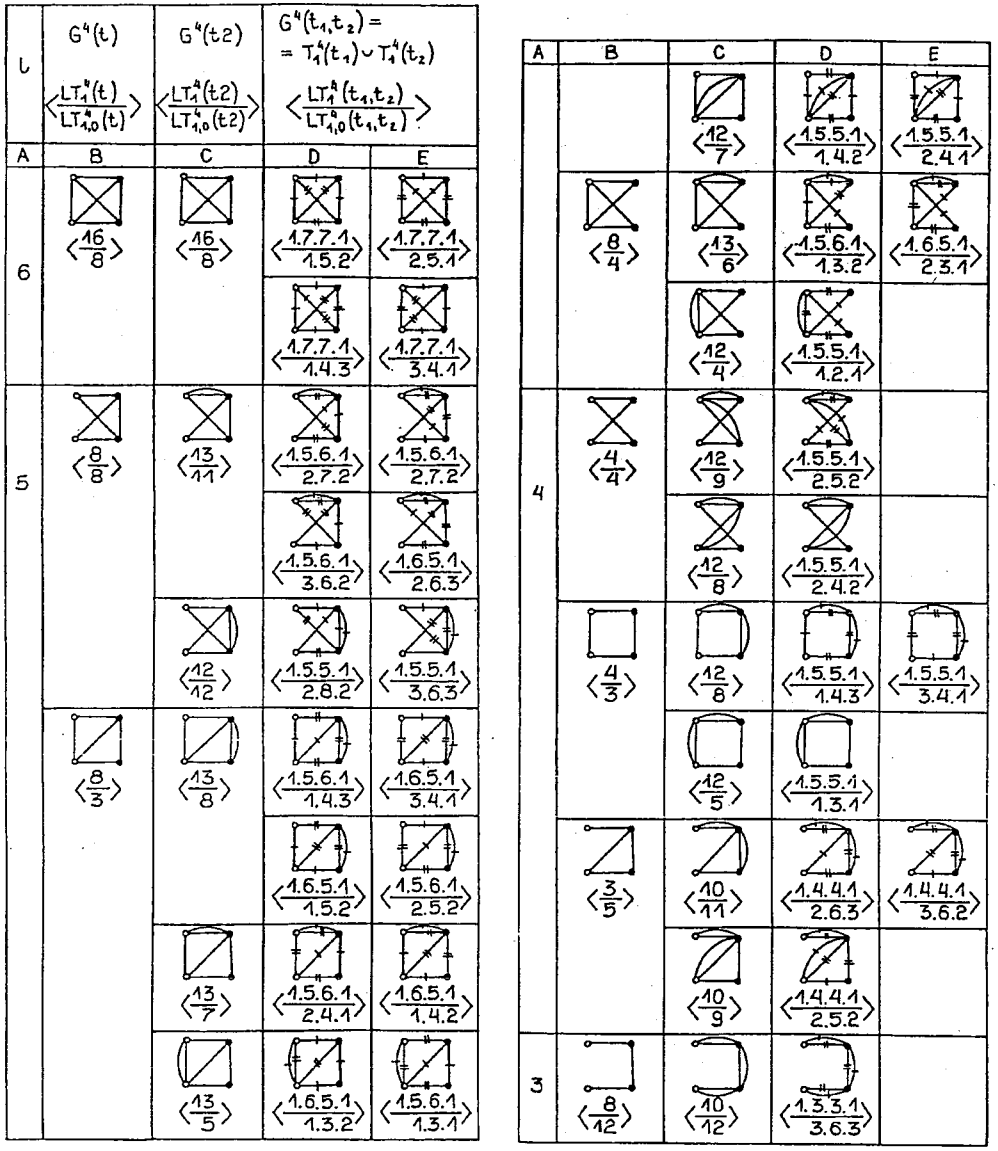
A	B	C	D	E	F
14	$t_1\ t_1\ 0\ 0\ t_1\ 0$ $t_2\ 0\ 0\ t_2\ 0\ t_2$				
15	$t_1\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ 0$ $0\ t_2\ 0\ 0\ t_2\ t_2$				
16	$t_1\ t_1\ 0\ 0\ t_1\ 0$ $0\ t_2\ 0\ t_2\ 0\ t_2$				
17	$0\ t_1\ 0\ t_1\ 0\ t_1$ $t_2\ 0\ 0\ 0\ t_2\ t_2$		$\left\langle \frac{1,\ 5,\ 5,\ 1}{1,\ 2,\ 1} \right\rangle$	$\left\langle \frac{12}{4} \right\rangle$	
18	$0\ t_1\ 0\ 0\ t_1\ t_1$ $t_2\ 0\ 0\ t_2\ 0\ t_2$				
19	$t_1\ 0\ 0\ t_1\ 0\ t_1$ $0\ t_2\ 0\ 0\ t_2\ t_2$				
20	$t_1\ 0\ 0\ 0\ t_1\ t_1$ $0\ t_2\ 0\ t_2\ 0\ t_2$				

Jak łatwo zauważyć niektóre z zaprezentowanych w tabeli 2.3 [5] bi-grafy dwóników są homeomorficzne, a zatem przechodzimy do następnego etapu syntezy topologicznej.

2.6. PODZIAŁ OTRZYMANYCH BI-GRAFÓW NA KLASY ICH STRUKTUR KANONICZNYCH

Ostatnim etapem syntezy topologicznej, jest podział otrzymanych (w każdej klasie struktur kanonicznych unigrafów $\underline{G}^v(t)$ bi-grafów na klasy ich struktur kanonicznych. Podział ten łatwo można wykonać z wyników pracy [4]. Na rysunku 2.3 zamieszczono po jednym przedstawicielu z każdej klasy struktur kanonicznych bi-grafów cyklicznie spójnych układów dwójników $\underline{G}^v(t_1, t_2) = T_1{}^4(t_1) \cup T_1{}^4(t_2)$. Zgodnie z twierdzeniem 1.1 [5] zestawione na rys. 2.4 bi-grafy reprezentują układy dwójników które realizują admitancję wejściową w postaci funkcji wymiernej typu $Y_{3/2}(t_1, t_2)$.

Aby łatwiej było stwierdzić, mając dowolny układ dwójnika o $v=4$ wierzchołkach, składających się z dwóch rodzajów [slsoop] elementów, której strukturze jest on równoważny, otrzymane bi-grafy dwójników pogrupowano według trzech kryteriów:

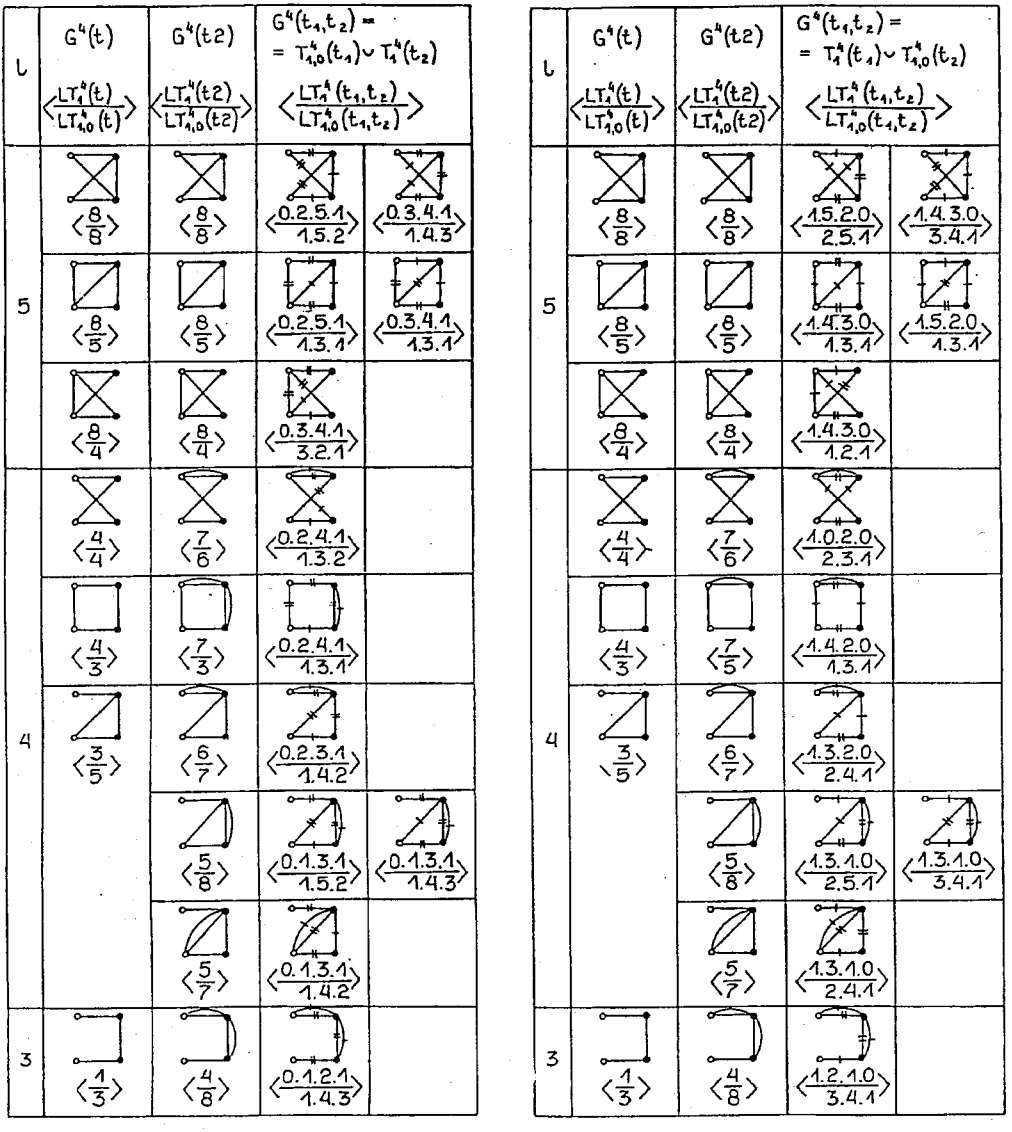


Rys. 2.3. Struktury kanoniczne unigrafów $G^4(t)$, multigrafów $G^4(t2)$ i bi-grafów $G^4(t_1, t_2) = T_1^4(t_1) \cup T_2^4(t_2)$ układy dwójników, oraz charakteryzujące je admitancje strukturalne

Pierwsze kryterium to funkcja strukturalna $Y_{1/1,0}[\mathrm{LT}(t)]$ charakteryzująca unigraf układu dwójnika.

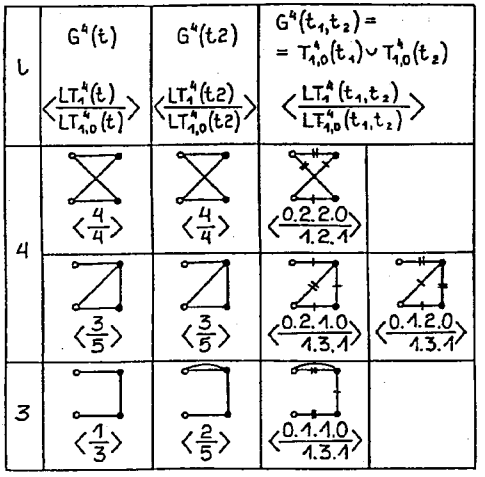
Drugie kryterium to funkcja strukturalna $Y_{1/1,0}[\mathrm{LT}(t2)]$ charakteryzująca multigraf układu dwójnika.

Trzecie kryterium to funkcja strukturalna $Y[\mathrm{LT}^v(t_1, t_2)$ charakteryzująca admitancję wejściową bi-grafu układu dwójnika składającego się z elementów rodzaju $\{t_1\}$ i $\{t_2\}$.



Rys. 2.4. Struktury kanoniczne unigrafów $G^4(t)$, multigrafów $G^4(t2)$ i bi-grafów $G^4(t_1, t_2) = T_{1,0}{}^4(t_1) \cup T_1{}^4(t_2)$ układów dwójników, oraz charakteryzujące je admitancje strukturalne

Jak wynika z rozważań pierwszej części niniejszej pracy (twierdzenia 1.1 ÷ 1.4) układ dwójnika o daje liczbie wierzchołków składający się z dwóch typów elementów, może realizować admitancję wejściową w postaci czterech typów funkcji wymiernej przy minimalnych elementach $n(t_1)$ i $n(t_2)$. Wyniki przeprowadzonej syntezy topologicznej pozostałych trzech typów bi-grafów dwójników ilustrują rysunki 2.4 ÷ 2.6. Na rysunkach tych zestawiono po jednym przedstawicielu z każdej klasy struktur kanonicznych bi-grafów układów dwójników będących sumą teoriomnogościową



Rys. 2.6. Struktury kanoniczne unigrafów $G^4(t)$, multigrafów $G^4(t_2)$ i bi-grafów $G^4(t_1, t_2)=T_{1,0}{}^4(t_1)\cup T_{1,0}{}^4(t_2)$ układów dwójników, oraz charakteryzujące je admitancje strukturalne

dendrytów k-drzewowych, typu $T_{k1}{}^4(t_1)$ i $T_{k2}(t_2)$. I tak na rys. 2.4 zestawiano struktury kanoniczne typu $\underline{G}^4(t_1, t_2)=T_{1,0}{}^4(t_1)\cup T_1{}^4(t_2)$, na rys. 2.5 struktury kanoniczne typu $\underline{G}^4(t_1, t_2)=T_1{}^4(t_1)\cup T_{1,0}{}^4(t_2)$, a na rys. 2.6 struktury kanoniczne typu $\underline{G}^4(t_1, t_2)=T_{1,0}{}^4(t_1)\cup T_{1,0}{}^4(t_2)$. Otrzymane typy struktur kanonicznych bi-grafów dwójników pogrupowano według kryteriów jakie zastosowano na rys. 3.

PODSUMOWANIE

Do najważniejszych rezultatów niniejszej pracy można zaliczyć — opracowanie procedury syntezy topologicznej tzw. metodą przeglądu hierarchicznego, pozwalającą wygenerować wszystkie możliwe struktury kanoniczne $\underline{G}(t_1, t_2)$ bi-grafów dwójników.

W ogólnym przypadku proces syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów układów, metodą przeglądu hierarchicznego zawiera następujące etapy:

1. Pierwszym etapem jest generacja wszystkich możliwych unigrafów rozpatrywanych układów, przy zadanych ograniczeniach realizacji.

Ograniczenia realizacji mogą dotyczyć np.: liczby wierzchołków unigrafu, liczby gałęzi w unigrafie, spójności względem odpowiednich wierzchołków itp.

2. Drugi etap jest podział wygenerowanych unigrafów układów na klasy unigrafów równoważnych względem przyjętych kryteriów równoważności.

Kryteria równoważności mogą dotyczyć nie tylko strukturalnej równoważności — homeomorfizmu unigrafów (rozpatrywanych w niniejszej pracy), ale np.: typy struktury topologicznej unigrafów (np.: struktury mostkowe, struktury drabinkowe itp.), wyboru unigrafów zawierających lub nie zawierających gałęzi incydentnych do wierzchołków brzegowych rozpatrywanych układów i.t.p.

Tym samym już na etapie syntezy topologicznej struktur kanonicznych unigrafów (o nie dużych mocach zbioru rozwiązań) ogranicza się klasy układów które będą rozpatrywane w następnych etapach syntezy.

3. Trzeci etap jest — wypełnianiem jednego przedstawiciela każdej klasy struktur kanonicznych unigrafów $\underline{G}^v(t)$ mono-grafami $G^v(t_i)$ zawierającymi tylko dany rodzaj elementów $\{t_i\}$ tak aby spełniona była zależność:

$$G^v(t) = \bigcup_{i=1}^{m} G^v(t_i) \tag{2.6}$$

przy zadanych kryteriach fizycznej realizowalności układów (gdzie m — liczba rodzajów elementów).

Należy zwrócić uwagę że wybór struktury mono-grafu $G^v(t_1)$ ma istotny wpływ na postać funkcji wymiernej charakteryzującej dany parametr układu. Biorąc pod uwagę różne struktury mono-grafów $G^v(t_i)$ można otrzymać różne stopnie wielomianów licznika i mianownika funkcji wymiernej charakteryzującej dany parametr układu, jak również różną liczbę składników sum iloczynów występujących w tych wielomianach.

Ponadto należy zwrócić uwagę, że wybierając odpowiednią strukturę jednego z mono-grafów $G^v(t_i)$ rozpatrywanego układu np: w postaci *„drzewa z korzeniem"* można zbudować układ w którym dany rodzaj elementów $\{t_i\}$ będzie miał np. wspólną masę.

4. Etap czwarty to podział otrzymanych m-grafów układów na klasy struktur równoważnych według przyjętych kryteriów równoważności. Kryteria równoważności mogą dotyczyć zarówno równoważności w sensie homeomorfizmu układów, jak również w sensie ekwiwalentności [4].

O celowości rozpatrzenia zagadnienia syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów układów mogą świadczyć dwie liczby; liczba wszystkich możliwych układów realizujących daną funkcję i liczba typów układów niehomeomorficznych realizujących daną funkcję. Na przykład, układów dwójników o $v=5$ wierzchołkach skladających się $G^v(t_1, t_2)=T_1^5(t_1)\cup T_1^5(t_2)$, które realizują admitancję wejściową w postaci funkcji wymiernej $Y_{4/3}(t_1, t_2)$ istnieje 12038 (tabela 2.1 [5]). Natomiast typów układów homeomorficznych, które mogą być brane pod uwagę przez konstruktora istnieje tylko 440 (tab. 2.1 [5]).

BIBLIOGRAFIA

1. N. D e o: *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce.* Warszawa: PWN, 1980
2. M. N. S. S w a m y, K. T h u l a s i r a m a n: *Graphs, networks and algorythms.* New York: Wiley — Interference, 1981,
3. Z. W r ó b e l: *Funkcje strukturalne grafów układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów.* Kwart. El i Tel. 1991, 37, z. 1—2

4. Z. W r ó b e l: *Homeomorfizm grafów układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów*. Kwart. El. i Tel. 1991, 37, z. 1–2
5. Z. W r ó b e l: *Synteza struktur kanonicznych bi-grafów układów dwójników. Część I. Metoda przeglądu bezpośredniego*. Kwart. El. i Tel. 1991, 37, z. 1–2

Z. WRÓBEL

SYNTHESIS OF CANONICAL STRUCTURES OF BI-GRAPHS ONE-PORT CIRCUITS CONSISTING OF TWO KINDS OF ELEMENTS

Part. II. Hierarchical reviewing method

Summary

Procedure of topological synthesis of canonical structures of bi-graphs one-port, was presented alloing to generate all possible canonical structures of bi-graphs $\underline{G}(t_1, t_2)$ one-port circuit, was shown here. This synthesis procedure was illustrated by the example of four types of bi-graphs one-port circuits $G^4(t_1, t_2) = T_{k_1}^4(t_1) \cup T_{k_2}^4(t_2)$, (where: $k_1 = 1 \vee 2$, $k_2 = 1 \vee 2$).

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, z. 1–2, SS. 99–115

621.315.592:53

Aproksymacja statycznej charakterystyki wyjściowej tranzystora bipolarnego za pomocą funkcji wykładniczej

TADEUSZ WYSOCKI, LECH J. WEISS

Akademia Techniczno-Rolnicza, Bydgoszcz

FELICJA WYSOCKA-SCHILLAK

Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Bydgoszcz

Otrzymano 1990.07.18

Autoryzowano do druku 1990.11.15

W artykule opisano zastosowanie funkcji wykładniczej $W_w(x)$ do aproksymacji charakterystyki wyjściowej tranzystora bipolarnego małej mocy w układzie WE oraz rodziny charakterystyk wyjściowych takiego tranzystora. Zaproponowany sposób aproksymacji zilustrowano przykładem liczbowym. W dodatku podano również program wykreślania charakterystyk z zastosowaniem minikomputera.

1. WPROWADZENIE

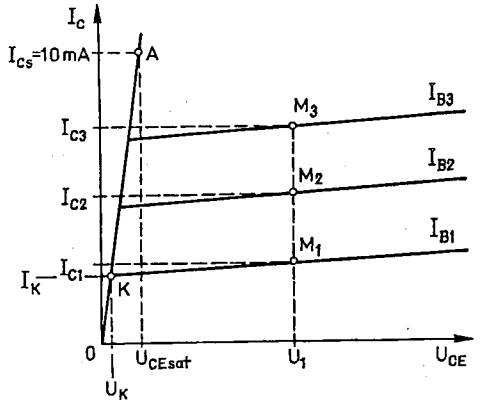
Dla przeprowadzenia analizy układu zawierającego tranzystor bipolarny, zwłaszcza przy użyciu maszyny cyfrowej, trzeba statyczną charakterystykę wyjściową tranzystora $I_C = I_C(U_{CE})$, $I_B = \text{const}$, przedstawić w postaci analitycznej. W niektórych przypadkach wystarcza aproksymacja tej charakterystyki za pomocą linii łamanej, jak to przedstawiono na rys. 1. Nachylenie prostej OA wyznacza się na podstawie znajomości katalogowej wartości napięcia nasycenia U_{CEsat}, mierzonego na prądzie $I_{Cs} = 10$ mA. i ustalonej przez wytwórcę wartości prądu bazy, np. dla tranzystorów BC 107, 108, 109 oraz podobnych przy prądzie $I_B = 0{,}5$ mA. Następnie dla zadanej wartości napięcia $U_{CE} = U_1$, zazwyczaj równej 5 V, mierzy się wartości prądów kolektora I_{C1}, I_{C2}, I_{C3},..., odpowiadającym zadanym prądom bazy I_{B1}, I_{B2}, I_{B3},... Pomierzone prądy kolektora wyznaczają położenie punktów M_1, M_2, M_3,..., przez które kreśli się proste nachylone względem osi napięć pod kątem, którego tangens jest liczbowo równy znamionowej wartości parametru h_{22e}, tj. małosygnałowej rozwarciowej admitancji wyjściowej tranzystora pracującego w układzie WE. Analityczne wyrażenie opisujące linię łamaną ma postać (dla $I_B = I_{B1}$):

$$I_C = \begin{cases} \dfrac{I_{Cs}}{U_{CEsat}} \cdot U_{CE} & \text{dla } 0 < U_{CE} < U_K \\ I_K + h_{22e} \cdot (U_{CE} - U_K) & \text{dla } U_{CE} > U_K, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie:

$$U_K = U_{CEsat} \cdot \frac{I_{C1} - h_{22e} \cdot U_1}{I_{Cs} - h_{22e} \cdot U_{CEsat}} \tag{2}$$

$$I_K = I_{Cs} \cdot \frac{I_{C1} - h_{22e} \cdot U_1}{I_{Cs} - h_{22e} \cdot U_{CEsat}}, \tag{3}$$



Rys. 1. Aproksymacja charakterystyk wyjściowych tranzystora bipolarnego za pomocą linii łamanej (I_B=const)

Gdy jednak zachodzi potrzeba przeprowadzenia dokładniejszej analizy układu, a chwilowy punkt pracy tranzystora może znajdować się bardzo blisko linii odgraniczającej obszar aktywny od obszaru nasycenia, aproksymacja linią łamaną jest zbyt mało dokładna. Zdaniem autorów, do aproksymacji statycznych charakterystyk wyjściowych tranzystora bipolarnego można wykorzystać funkcję wykładniczą [1]:

$$W_w(x) = \frac{1}{1 + \exp(-2kx)} \tag{4}$$

stosowaną do aproksymacji jednostkowej funkcji skokowej.

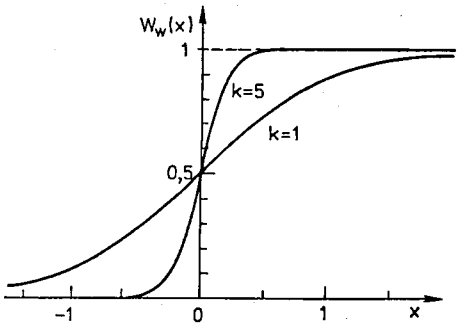
2. FUNKCJA APROKSYMUJĄCA

Wykres funkcji (4) jest przedstawiony na rys. 2. Kształt tego wykresu, dla $x \geqslant 0$, wskazuje na możliwość wykorzystania funkcji (4) jako funkcji aproksymującej charakterystykę wyjściową tranzystora bipolarnego. Po przemnożeniu funkcji (4) przez 2 i odjęciu jedności otrzymuje się funkcję

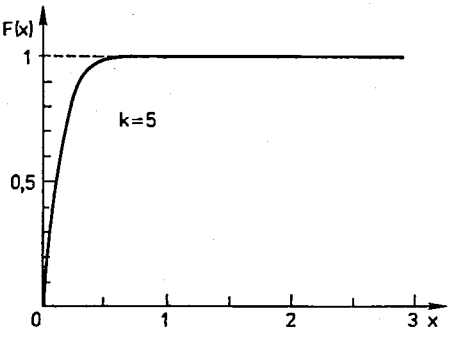
$$F(x) = 2 \cdot W_w(x) - 1 = \frac{2}{1 + \exp(-2kx)} - 1, \tag{5}$$

której wykres, dla $x \geqslant 0$, jest przedstawiony na rys. 3. Wartość funkcji $F(x)$, dla $x \to \infty$, asymptotycznie zbliża się do jedności. Jeżeli do funkcji $F(x)$ dodać człon liniowy, otrzymuje się funkcję

$$F_w(x) = \frac{2}{1 + \exp(-2kx)} - 1 + ax, \quad a > 0 \tag{6}$$



Rys. 2. Wykres funkcji $W_w(x)$ dla dwu wartości parametru k



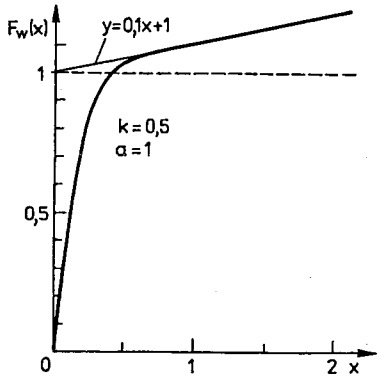
Rys. 3. Wykres funkcji $F(x)$ dla $k=5$

której wykres jest przedstawiony na rys. 4. Krzywa opisana funkcją $F_w(x)$ zbliża się asymptotycznie do prostej $y=ax+1$. Pochodna funkcji $F_w(x)$ jest równa

$$F_w'(x) = \frac{4k \exp(-2kx)}{[1 + \exp(-2kx)]^2} + a, \tag{7}$$

Jej wartość dla $x=0$ wynosi

$$F_w'(0) = k + a. \tag{8}$$



Rys. 4. Wykres funkcji $F_w(x)$ dla $k=5$, $a=0{,}1$

Jeżeli wartość modułu argumentu funkcji wykładniczej jest znacznie większa od jedności ($2k \gg 1$) oraz jednocześnie wartość współczynnika a jest mniejsza od jedności ($a \ll 1$), można praktycznie przyjąć, że

$$F_w'(0) \approx k;\ k \gg 1,\ a \ll 1. \tag{9}$$

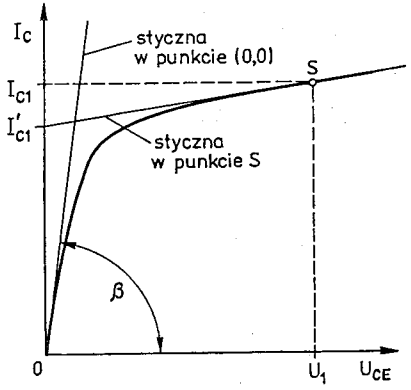
Funkcję $F_w(x)$ można zastosować do aproksymacji charakterystyki $I_C=f(U_{CE})$, $I_B=\text{const}$, tranzystora bipolarnego.

3. APROKSYMACJA CHARAKTERYSTYKI TRANZYSTORA

Aproksymację charakterystyki $I_C=f(U_{CE})$, $I_B=\text{const}$, tranzystora małej mocy, w zakresie napięć od 0 do około 15 V i w zakresie prądów od 0 do około 10 mA można przeprowadzić przy jednym z dwu założeń:

Założenie 1

Styczna do funkcji aproksymującej w punkcie o współrzędnych (0,0) wykazuje takie samo nachylenie jak styczna do aproksymowanej charakterystyki w punkcie o takich samych współrzędnych, a dla katalogowej wartości napięcia $U_{CE}=U_1=5$ V asymptota funkcji aproksymującej jest praktycznie styczna do charakterystyki — rys. 5, punkt S.

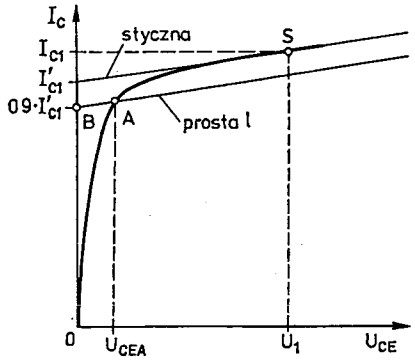


Rys. 5. Wykres ilustrujący założenie 1

Założenie 2

Dla katalogowej wartości napięcia $U_{CE}=U_1=5$ V asymptota funkcji aproksymującej jest praktycznie styczna do aproksymowanej charakterystyki, a krzywa aproksymująca przechodzi przez punkt A leżący na aproksymowanej charakterystyce oraz na prostej 1 równoległej do asymptoty i przechodzącej przez punkt B o współrzędnych $(0;0{,}9\cdot I'_{C1})$, gdzie I'_{C1} jest prądem wyznaczonym przez punkt przecięcia się asymptoty z osią I_C — zob. rys. 6[1].

[1] Wartość $0{,}9\cdot I_{C1}$ odpowiada w przybliżeniu wartości prądu przyjmowanej do wyznaczania napięcia kolankowego (*knee voltage*) U_{CEK} [3,5]



Rys. 6. Wykres ilustrujący założenie 2

W przypadku korzystania z Założenia 1 trzeba:

– dla $U_{CE} = U_1 = 5$ V poprowadzić styczną do charakterystyki $I_C = f(u_{CE})$ i traktować ją jako asymptotę funkcji aproksymującej $F_w(x)$.

– wyznaczyć nachylenie asymptoty,

– wyznaczyć wartość prądu I'_{C_1} (rys. 5),

– wyznaczyć nachylenie stycznej do aproksymowanej charakterystyki o współrzędnych (0,0) ($b = \mathrm{tg}\beta$).

Funkcja aproksymująca charakterystykę ma postać

$$I_C = I'_{C1}\left[\frac{2}{1 + \exp(-2kU_{CE})} - 1 + aU_{CE}\right] \tag{10}$$

przy czym wartość parametru a jest równa

$$a = h_{22e} \cdot \frac{1}{I'_{C_1}}, \tag{11}$$

gdzie h_{22e} jest wartością rozwarciowej admitancji wyjściowej w punkcie S (rys. 5). Natomiast nachylenie b stycznej do charaterystyki w punkcie o współrzędnych (0,0) jest równe nachyleniu stycznej do funkcji aproksymującej w tym samym punkcie. Według wzorów (8) i (10) mamy

$$b = (k + a) \cdot I'_{C_1} \tag{12}$$

Stąd parametr k funkcji aproksymującej jest równy

$$k = \frac{b}{I'_{C_1}} - a \tag{13}$$

Ponieważ zachodzi zależność

$$\frac{b}{I'_{C_1}} \gg a \tag{14}$$

można przyjąć, że

$$k \approx \frac{b}{I'_{C_1}} \tag{15}$$

Przy przyjęciu Założenia 2 trzeba:

– dla $U_{CE}=U_1=5$ V poprowadzić styczną do charakterystyki $I_C=f(U_{CE})$ i traktować ją jako asymptotę funkcji aproksymującej,

– wyznaczyć nachylenie asymptoty,

– wyznaczyć wartość prądu I'_{C1} (rys. 6),

– przez punkt B o współrzędnych $(0;0{,}9\cdot I'_{C1})$ przeprowadzić prostą pomocniczą równoległą do asymptoty i przecinającą charakterystykę w punkcie A,

– wyznaczyć wartość napięcia U_{CEA}.

Funkcja aproksymująca (10) ma taką samą postać, jak w przypadku przyjęcia założenia 1. Wartość parametru a wyznaczamy wg wzoru (11), a wartość parametru k z zależności

$$\frac{2}{1 + \exp(-2kU_{CEA})} - 1 = 0{,}9 \tag{16}$$

Stąd otrzymujemy

$$k = \frac{\ln 19}{2 \cdot U_{CEA}} = \frac{1{,}4722}{U_{CEA}}. \tag{17}$$

4. APROKSYMACJA RODZINY CHARAKTERYSTYK WYJŚCIOWYCH

Rodzinę charakterystyk wyjściowych tranzystora można aproksymować w jeden z dwu sposobów. W pierwszym z nich, na drodze pomiaru wyznacza się położenie kolejnych punktów (np. M_1, M_2,... – rys. 1), przez które przy wybranym napięciu U_{CE} np. równym 5 V przechodzą charakterystyki odpowiadające zadanym wartościom prądów bazy (np. 5, 10, 15,... μA). Następnie dla tych punktów pracy mierzy się wartości parametru h_{22e} i w opisany sposób aproksymuje się kolejne charakterystyki $I_C=I_C(U_{CE})$; $I_B=\text{const}$.

Drugi sposób rozwiązywania tego zadania polega na wykorzystaniu podawanych w katalogach normowanych charakterystyk: rozwarciowej admitancji wyjściowej h_{22eN} oraz współczynnika wzmocnienia prądowego h_{21EN} w funkcji prądu kolektora. Normowanie parametrów h tranzystora polega na porównaniu wartości parametru występującej przy prądzie I_C z wartością parametru przy prądzie odniesienia $I_C=2$ mA i przy napięciu $U_{CE}=5$ V. Dla przeprowadzenia aproksymacji rodziny charakterystyk wyjściowych trzeba graficznie dane zależności $h_{22eN}=h_{22eN}(I_C)$ oraz $h_{21EN}=h_{21EN}(I_C)$ opisać zależnością funkcyjną. Wykresy tych zależności dla różnego typu tranzystorów małej mocy mają podobny kształt. Można się więc spodziewać, że zależności te będą opisane funkcjami takiej samej postaci, różniącymi się jedynie wartościami współczynników liczbowych.

Ze względu na duży zakres zmienności prądu I_C, zależności te są zazwyczaj podawane w skali log-log lub log-lin. W celu znalezienia postaci funkcji je opisującej, trzeba wpierw wykresy charakterystyk przerysować w skali podwójnie liniowej. Przykładowo rozpatrzymy zależności dla tranzystorów typu BC 107, 108 i 109.

Na rys. 7 pokazany jest wykres zależności normowanej wartości parametru h_{22eN} wg katalogu [3], a na rys. 8 wykres tej samej zależności w skali podwójnie liniowej. Na wykresie tym kółkami zaznaczono wartości parametru h_{22eN} obliczone wg funkcji aproksymującej

$$h_{22eN} = 0{,}465 \cdot I_C + 0{,}014 \cdot I_C^2 + 0{,}001 \cdot I_C^3. \tag{18}$$

Jak z tego wykresu wynika, funkcja (18) dobrze przybliża zależność $h_{22eN} = h_{22eN}(I_C)$ podaną w katalogu. Wartość admitancji wyjściowej przy napięciu $U_{CE} = 5$ V oraz przy prądzie I_C jest równa

$$h_{22e}(I_C) = h_{22eO} \cdot h_{22eN}(I_C); \quad U_{CE} = 5 \text{ V}, \tag{19}$$

gdzie h_{22eO} jest wartością admitancji przy prądzie $I_C = 2$ mA i napięciu $U_{CE} = 5$ V.

Na rys. 9 pokazana jest normowana charakterystyka $h_{21EN} = h_{21EN}(I_C)$, $U_{CE} = 5$ V, dla tranzystorów BC 107, 108 i 109 wg katalogu [3]. Znając wartość parametru h_{21EO} dla punktu odniesienia $I_C = 2$ mA, $U_{CE} = 5$ V oraz przebieg normowanej charakterystyki h_{21EN}, można dla założonych wartości prądu bazy, np. 5, 10, 15,... μA, wyznaczyć wartość prądu kolektora przy $U_{CE} = 5$ V. Mamy

$$h_{21E} = h_{21EO} \cdot h_{21EN} = \frac{2 \text{ mA}}{I_{BO}} \cdot h_{21EN} = \frac{I_C}{I_B} \tag{20}$$

gdzie I_{BO} oznacza prąd bazy, przy którym $I_C = 2$ mA dla $U_{CE} = 5$ V ($I_{BO} = 2$ mA/h_{21EO}).

Stąd otrzymujemy

$$I_C = I_B \cdot h_{21EO} \cdot h_{21EN}, \quad U_{CE} = 5 \text{ V} \tag{21}$$

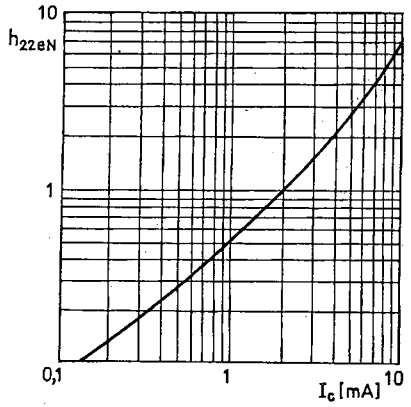
oraz

$$\frac{I_C}{h_{21EN}} = I_B \cdot h_{21EO}. \tag{22}$$

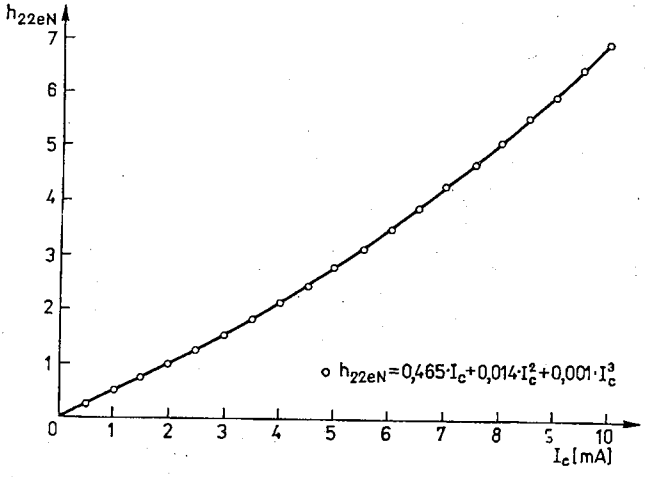
Na podstawie wykresu charakterystyki $h_{21EN} = h_{21EN}(I_C)$, rys. 9, można skonstruować wykres zależności

$$I_C = I_C\left(\frac{I_C}{h_{21EN}}\right) = I_C(I_B \cdot h_{21EO}). \tag{23}$$

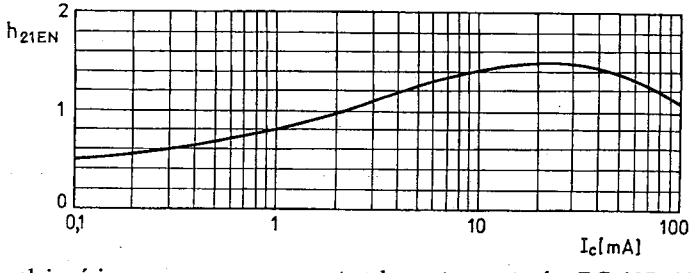
W tym celu trzeba z wykresu – rys. 9 – dla kolejnych wartości I_C odczytać wartości h_{21EN} i podzielić wartość I_C przez odpowiadającą jej wartość h_{21EN}. Prądy I_C oraz ilorazy I_C/h_{21EN} wyznaczają współrzędne kolejnych punktów wykresu zależności (23). Na rys. 10 przedstawiony jest wykres tej zależności dla tranzystorów BC 107, 108, 109. Na tym wykresie zakres zmienności prądu I_C ograniczono od góry do wartości równej 10 mA, gdyż podawany w katalogach wykres charakterystyki $h_{22eN} = h_{22eN}(I_C)$ wykonany jest dla $I_C = 0{,}1 \div 10$ mA.



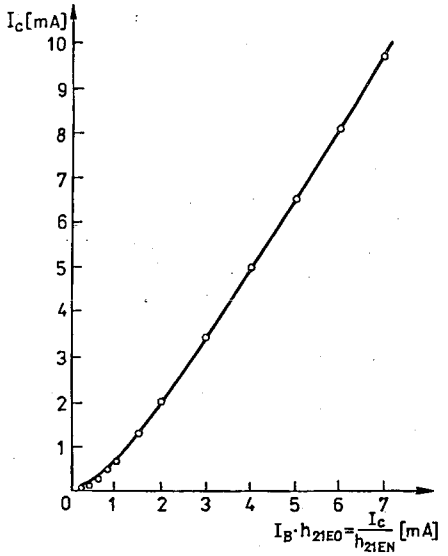
Rys. 7. Wykres zależności normowanego parametru h_{22eN} tranzystorów BC 107, 108, 109 od prądu kolektora wg [3]



Rys. 8. Wykres zależności normowanego parametru h_{22eN} tranzystorów BC 107, 108, 109 od prądu kolektora (w skali lin-lin)



Rys. 9. Wykres zależności normowanego parametru h_{21EN} tranzystorów BC 107, 108, 109 od prądu kolektora wg [3]



Rys. 10. Wykres zależności prądu kolektora I_C od iloczynu $I_B \cdot h_{21EO}$ dla tranzystorów BC 107, 108, 109

Zależność $I_C = I_C(I_B \cdot h_{21EO})$ pokazaną na rys. 10 dobrze aproksymuje funkcja

$$I_C = 1{,}58\,(\sqrt{x^2 + 1} - 1) + 0{,}002 \cdot x^2 \tag{24}$$

gdzie:

$$x = \frac{I_C}{h_{21EN}} = I_B \cdot h_{21EO} \tag{25}$$

Wartości prądu I_C obliczono wg wzoru (24) zaznaczono na rys. 10 kółkami.

Czynności, jakie należy wykonać przy posługiwaniu się drugim sposobem aproksymacji rodziny charakterystyk wyjściowych tranzystora, są następujące:

1) Dla $U_{CE} = 5$ V oraz $I_C = 2$ mA zmierzyć wartości współczynnika wzmocnienia prądowego h_{21EO} oraz rozwarciowej admitancji wyjściowej h_{22eO}.

2) W katalogu, dla tranzystorów danego typu, wyszukać charakterystyki:

a) napięcia nasycenia w funkcji prądu kolektora $U_{CEsat} = f(I_C)$,

b) normowanego parametru $h_{22EN} = f(I_C)$, $U_{CE} = 5$ V.

c) normowanego parametru $h_{21EN} = f(I_c)$, $U_{CE} = 5$ V.

3) Z charakterystyki $U_{CEsat} = f(I_C)$ odczytać wartość napięcia nasycenia np. dla $I_C = 10$ mA. Dla tranzystorów małej mocy wartość napięcia nasycenia w zakresie zmian prądu I_C od 0,1 do 10 mA ulega tylko małym zmianom.

4) Przerysować charakterystykę h_{22EN} w skali podwójnie liniowej i aproksymować ją np. funkcją

$$h_{22eN} = a_1 I_C + a_2 I_C^2 + a_3 I_C^3. \tag{26}$$

5) Na podstawie charakterystyki $h_{21eN}=f(I_C)$ wykreślić charakterystykę $I_C = I_C\left(\frac{I_C}{h_{21EN}}\right)$. Zakres zmienności prądu I_C przyjąć taki sam jak dla charakterystyki $h_{22eN}=f(I_C)$ — pt. 4. Wykreśloną charakterystykę aproksymować np. funkcją

$$I_C = b_1(\sqrt{x^2 + 1} - 1) + b_2 x^2 \tag{27}$$

gdzie

$$x = \frac{I_C}{h_{21EN}} = I_B \cdot h_{21EO}. \tag{28}$$

6) Dla kolejnych założonych wartości prądu bazy, np. 5, 10, 15,... μA, posługując się funkcją aproksymującą (27) obliczyć wartości prądu I_C występujące przy napięciu U_C występujące przy napięciu $U_{CE}=5$ V.

7) Dla obliczonych wartości prądu I_C, posługując się funkcją aproksymującą (26), wyznaczyć wartości normowanej admitancji wyjściowej h_{22eN} oraz admitancji wyjściowej wg wzoru (19)

$$h_{22e} = h_{22eO} \cdot h_{22eN}$$

8) Mając obliczone kolejne wartości prądu I_C (zob. pt. 6) oraz kolejne wartości admitancji h_{22e} (zob. pt. 7), wyznaczyć dla każdego punktu S, rys. 11, wartość prądu I'_{C1}

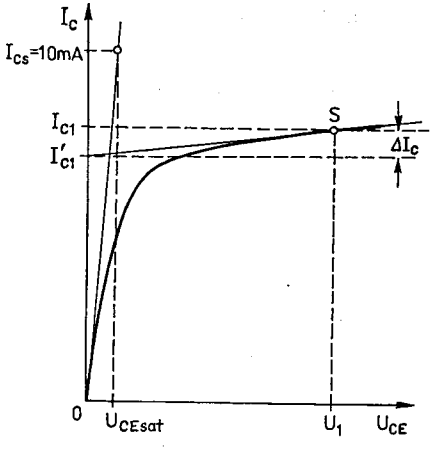
$$I'_{C1} = I_{C1} - \Delta I_C = I_{C1} - U_1 \cdot h_{22e}, \tag{29}$$

gdzie $U_1=5$ V
oraz wg wzoru (11) wartość parametru a

$$a = h_{22e} \cdot \frac{1}{I'_{C1}}.$$

9) Obliczyć nachylenie charakterystyki w punkcie o współrzędnych (0,0)

$$b \approx \frac{I_{Cs}}{U_{CEsat}} \tag{30}$$



Rys. 11. Wykres funkcji aproksymującej

oraz dla kolejnych wartości prądu I_{C1} (zob. pt. 8) obliczyć wg wzoru (13) wartości parametru k

$$k = \frac{b}{I'_{C1}} - a.$$

Jeżeli w katalogu przyrządów półprzewodnikowych podana jest rodzina charakterystyk $I_C = I_C(U_{CE})$, $I_B = \text{const}$, dla małych napięć $U_{CE}(U_{CE} \leqslant 1\ \text{V})$, wartość współczynnika k można wyznaczyć wg wzoru (17) – założenie 2, rys. 6. Ten sposób jest godny polecenia, gdy zachodzi potrzeba aproksymacji charakterystyk dla napięć $U_{CE} < 0{,}2$ V.
Funkcje aproksymujące kolejne charakterystyki mają wg wzoru (10) postać

$$I_C = I'_{C1}\left[\frac{2}{1 + \exp(-2kU_{CE})} - 1 + a.U_{CE}\right].$$

Sposób aproksymacji charakterystyk wyjściowych tranzystora zostanie zilustrowany poniższym przykładem.

5. PRZYKŁAD

Aproksymować rodzinę charakterystyk wyjściowych tranzystora BC 108, gr. A, dla którego pomierzony współczynnik wzmocnienia prądowego przy $I_C = 2$ mA, $U_{CE} = 5$ V, ma wartość $h_{21EO} = 200$, a rozwarciowa admitancja wyjściowa jest dla tego samego punktu pracy równa $h_{22eO} = 18$ μS. Dla porównania przeprowadzić aproksymację dla $h_{21EO} = 180$. Przyjąć zakres zmian napięcia U_{CE} od 0 do 10 V i zakres zmian prądu I_C od 0 do 10 mA. Prąd bazy zmieniać co 5 μA.

Podany w katalogach [3,4] wykres charakterystyki $h_{22eN} = h_{22eN}(I_C)$ jest pokazany na rys. 7, a na rys. 8 wykres tej charakterystyki w skali podwójnie liniowej. Charakterystyka ta jest opisana zależnością (18). Wykres charakterystyki $h_{21eN} = h_{21eN}(I_C)$ według [3] jest przedstawiony na rys. 9, a na rys. 10 wykres zależności $I_C = I_C(I_C/h_{21EN})$ aproksymowanej funkcją (24). Z wykresu charakterystyk tranzystora BC 108 podanego w katalogu firmy Siemens, dla $I_B = 30$ μA, odczytujemy wartość napięcia $U_{CEA} \approx 0{,}12$ V i wg wzoru (17) obliczamy wartość współczynnika k

$$k = \frac{1{,}472}{0{,}12} \approx 12.$$

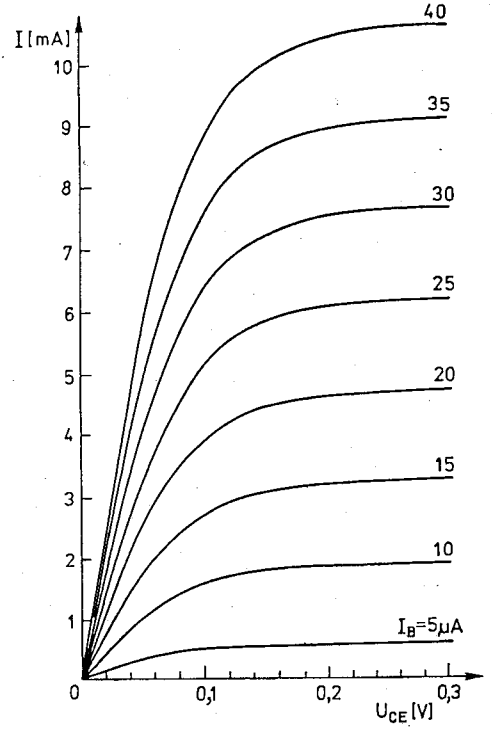
Obliczone według wzoru (24) wartości prądu I_{C1}, odpowiadające prądom bazy 5, 10, 15, ..., 40 μA, podane są w tablicy 1. Obliczenia wykonano dla dwu wartości współczynnika h_{21EO} i to 200 oraz 180. Dla obliczenia wartości prądu I_{C1}, odpowiadających kolejnym wartościom prądu bazy przy $U_{CE} = 5$ V, obliczono wg wzoru (29) wartości prądu I'_{C1} oraz według wzorów (26) i (19) wartości parametru h_{22e}. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

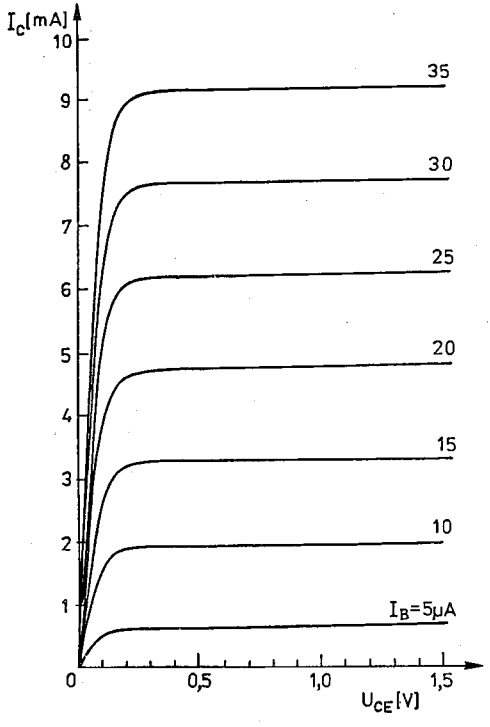
Wyniki obliczeń do przykładu

I_B μA	h_{21EO} = 200			h_{21EO} = 180		
	I_{C1} mA	I_{C1}' mA	h_{22e} μS	I_{C1} mA	I_{C1}' mA	h_{22e} μS
5	0,66	0,634	5,15	0,55	0,529	4,27
10	1,96	1,913	16,65	1,68	1,610	14,02
15	3,43	3,271	31,73	2,98	2,846	26,89
20	4,97	4,720	49,91	4,33	4,12	42,07
25	6,53	6,176	70,85	5,74	5,44	59,94
30	8,10	7,628	94,43	7,16	6,76	79,99
35	9,69	9,085	120,9	8,58	8,07	102,3
40	11,36	10,60	151,5	10,01	9,39	126,4

Następnie, posługując się wzorem (10), wyznaczono współrzędne kolejnych punktów charakterystyk wyjściowych przy U_{CE} zamieniającym się od 0 do 10 V. Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach. Rys. 12 przedstawia wynik aproksymacji charakterystyk dla $h_{22EO}=200$ i dla napięć U_{CE} nie przekraczających 0,3 V, rys. 13



Rys. 12. Wykres rodziny funkcji aproksymującej $I_C=I_C(U_{CE})$ dla $h_{21EO}=200$ oraz $I_B=5$, 10, 15,..., 40 μA, $U_{CE}=0\div0{,}3$ V



Rys. 13. Wykres rodziny funkcji aproksymujących $I_C=I_C(U_{CE})$ dla $h_{21EO}=200$ oraz $I_B=5$, 10,..., 35 μA, $U_{CE}=0\div1{,}5$ V

takie same rezultaty, lecz dla napięć U_{CE} do 1,5 V, a rys. 14 wynik aproksymacji dla napięć $U_{CE} \leqslant 10$ V. Na tym rysunku linią przerywaną dodatkowo wykreślono charakterystyki tranzystora, dla którego $h_{22EO} = 180$.

Na podstawie zależności podanych w rozdziale 4 opracowano zamieszczony w dodatku program dla wykreślenia charakterystyk tranzystorów bipolarnych z zastosowaniem minikomputera. Program ten napisano w języku Turbo-Pascal 3.01. W programie przyjęto wartości stałe: $I_{Cs} = 10$ mA, $I_B = 5$, 10, 15,..., 40 μA. Do programu należy wprowadzić wartości następujących parametrów:

h_{21EO} w zakresie od 50 do 500,

h_{22eO} w zakresie od 10^{-3} do 10^{-1} mS,

U_{CEsat} w zakresie od 0,1 do 1,0 V,

wartości współczynników a_1, a_2, a_3 oraz b_1, b_2, jak również wartości jednego z trzech przedstawionych do wyboru zakresów napięcia U_{CE} tj. 0,3 V, 1,5 V lub 10 V.

6. WNIOSKI

1) Zaproponowany sposób aproksymacji charakterystyki wyjściowej tranzystora może być zastosowany zarówno do aproksymacji pojedynczej charakterystyki, jak i rodziny charakterystyk przy stałej temperaturze otoczenia.

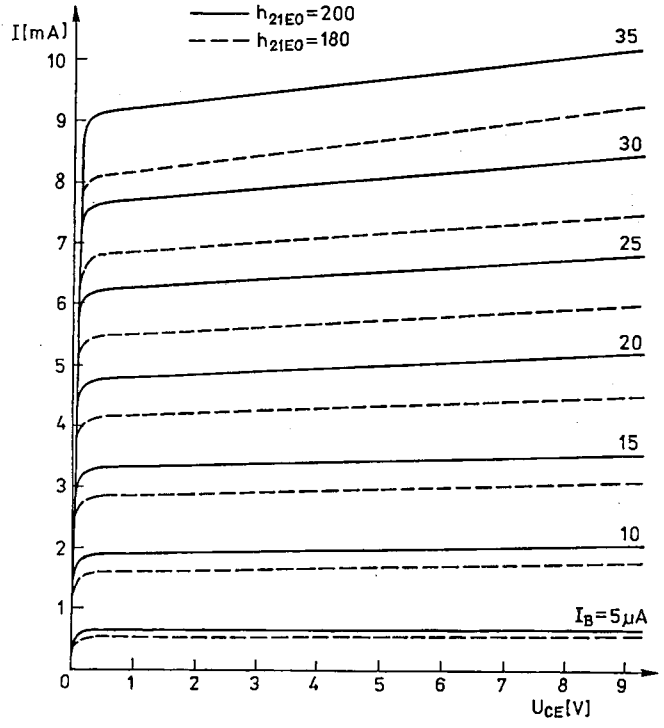
2) Funkcja aproksymująca dobrze przybliża charakterystykę wyjściową zarówno na odcinku prawie liniowym w obszarze aktywnym pracy tranzystora, jak i na odcinku *„kolana"* charakterystyki, występującego przy przejściu z obszaru aktywnego do obszaru nasycenia, oraz w obszarze nasycenia.

3) Jeżeli dla danego typu tranzystora wyznaczono funkcje aproksymujące charakterystyki $h_{22eN} = h_{22eN}(I_C)$ oraz $h_{21EN} = h_{21EN}(I_C)$, wzgl. $I_C = I_C(I_C/h_{21EN})$, to dla aproksymowania rodziny charakterystyk wyjściowych konkretnego tranzystora wystarcza znajomość wartości dwu wielkości: h_{21EO} oraz h_{22eO} wyznaczonych dla punktu pracy $U_{CE} = 5$ V, $I_C = 2$ mA.

Posługując się podanymi zależnościami, można również aproksymować charakterystyki wyjściowe tranzystora dla dowolnej wartości prądu bazy, różnej od najczęściej podawanych w katalogach 5, 10, 15,..., μA.

4) Chociaż sposób został opracowany dla tranzystorów małej mocy, można go również zastosować do aproksymacji charakterystyk tranzystorów większej mocy.

5) Wprawdzie zaprezentowany sposób aproksymacji nie uwzględnia wpływu napięcia U_{CE} na wartość parametru h_{22e}, lecz w zakresie zmiany napięć od około 1 V do około 10 V zmiany nachylenia charakterystyki wyjściowej tranzystora małej mocy dla prądów $I_C \leqslant 10$ mA są tak niewielkie, że w katalogach odcinek charakterystyki dla tego zakresu jest praktycznie wykreślany w postaci odcinka linii prostej. Dla napięć $U_{CE} \leqslant 0{,}3$ V zmiany parametru h_{22e} w zależności od napięcia U_{CE} są w znacznym stopniu uwzględnione w przebiegu funkcji aproksymującej. Dla tego zakresu zmian napięcia nie podaje się w katalogach zależności $h_{22eN} = h_{22eN}(U_{CE})$.



Rys. 14. Wykres rodziny funkcji aproksymujących $I_C = I_C(U_{CE})$ dla $h_{21EO} = 200$ (linie ciągłe) oraz $h_{21EO} = 180$ (linie przerywane), $I_B = 5, 10, \ldots, 35$ μA, $U_{CE} = 0 \div 9$ V

6) Jeżeli znana jest zależność normowanych charakterystyk $h_{22eN}(I_C)$ od temperatury otoczenia, można wg opisanego sposobu aproksymować charakterystyki dla różnych temperatur otoczenia.

BIBLIOGRAFIA

1. L. J. Weiss, T. Wysocki: Przybliżenia wykładniecze rzeczywistych przebiegów i rozkładów o charakterze skokowym lub impulsowym. Rozprawy Elektrotechniczne 2/1986, ss. 395–410
2. J. Antoniewicz: Tablice funkcji dla inżynierów, PWN, Warszawa 1969
3. Katalog: Przyrządy półprzewodnikowe, t. I, Diody i tranzystory, Wydawn. Przemysłu Maszynowego „Wema", Warszawa 1977
4. Katalog: Siemens Semiconductor Manual, różne wydania
5. Katalog: Philips Semiconductor Handbook, różne wydania
6. W. Marciniak: Przyrządy półprzewodnikowe i układy scalone, Warszawa: 1984, WNT

DODATEK

Program

dla wykreślenia charakterystyk tranzystorów bipolarnych

```
Program charakterystyki:
    CONST
      IB: ARRAY[1..8] of real = (5,10,15,20,25,30,35,40) ;
      n = 8;
      Ul = 5;
      Ics = 10;
    TYPE
      wektor = ARRAY[1..n] of real] ;
    VAR
      Ic, Ic1, Ic1x, h22eN, h22e, a, d, k : real ;
      b, p, t, ucemax, h22eo, ucesat, UCE, a1, a2, a3, b1, b2 : real ;
      i, j, l, h21eo          : integer ;
      typ                     : string[8] ;
PROCEDURE czolowka ;
    BEGIN
      GoToXY(5, 4) ; writlen ('Charakterystyki wyjściowe tranzystora n-p-n)

      GoToXY(5, 6) ; write('Typ tranzystora : ') ; readln(typ) ;
      GoToXY(5, 8) ; writeln('Wcisnij dowolny klawisz ') ;
      REPEAT
      UNTIL KeyPressed ;
      ClrScr ;
    END; {czolowka}
PROCEDURE CzytajDane ;
    BEGIN
      write('h21EO = ') ; readln(h21eo) ;
      write('h22eO[mS] = ') ; readln(h22eo) ;
      write('UCEsat = ') ; readln(ucesat) ;
      write('b1 = ') ; readln(b1) ;
      write('b2 = ') ; readln(b2) ;
      write('a1 = ') ; readln(a1) ;
      write('a2 = ') ; readln(a2) ;
      write('a3 = ') ; readln(a3) ;
      writeln('Wybierz zakres napiec UCEmax : ') ;
      writeln('UCEmax = 0. 3 V ') ;
      writeln('UCEmax = 1. 5 V ') ;
      writeln(' UCEmax = 9   V ') ;
      readln(ucemax) ;
      IF ucemax = 0. 3 THEN p := 0. 01 ;
      IF ucemax = 1. 5 THEN p := 0. 05 ;
      IF ucemax = 9    THEN p := 0. 3 ;
    END ; {czytajdane}
PROCEDURE Obliczenia ;
    BEGIN
      hires ;
      b := Ics/Ucesat ;
      FOR i := 1 TO n DO
```

```
      BEGIN
        d := (IB[i]*1e-3*h21eo)*(IB[i]*1e-3*h21eo);
        Ic1 := b1*(sqrt(d + 1) - 1) + b2*d;
        h22en := a1*Ic1*Ic1 + a2*Ic1 + a3*Ic1*Ic1*Ic1;
        h22e := h22eo*h22en;
        Ic1x := Ic1 - U1*h22e;
        a := h22e/Ic1x;
        k := b/Ic1x - a;
        DRAW(50,20,50,169,9); DRAW(50,20,350,20,9);
        DRAW(50,169,350,169,9); DRAW(350,20,350,169,9);
          FOR j := 0 TO 30 DO
            BEGIN
              UCE := j*p;
              t := 2*k*UCE;
              IF t > 70 THEN t := 70;
              Ic := Ic1x*(2/(1+exp(-t))-1+a*UCE);
              IF Ic > 14.9 THEN Ic := 14.9;
              plot(10*j + 50, 169 - round(10*Ic), 9);
            END;
      END;
    END; {Obliczenia}
Procedure napisy;
    BEGIN
      FOR 1 := 1 TO 14 DO
        PLOT(51, 169 - 1*10, 9);
        PLOT(150, 168, 9); PLOT(250, 168, 9);
      GoToXY(50, 2); writeln(typ);
      GoToXY(50, 3); writeln('IB = 5..40 mikroAmper');
      GoToXY(50, 5); writeln('h21eO = ', h21eo);
      GoToXY(50, 6); writeln('h22e[mS] = ', h22e : 2 : 3);
      GoToXY(50, 7); writeln('Ics[mA] = ', Ics);
      GoToXY(50, 8); writeln('UCEsat = ', UCEsat : 2: 3);
      GoToXY(3, 3); write(3/2*Ics : 2 : 0);
      GoToXY(2, 6); write('Ic');
      GoToXY(2, 7); write('[mA]');
      GoToXY(3, 9); write(Ics); GoTo(3, 15); write(ICS/2:2:0);
      GoToXY(47, 22); write('UCE');
      GoToXY(6, 23); write('0', '          ', UCE/3:1:1);
      GoToXY(31, 23); writeln(UCE*2/3:1:1, '          ', UCE:1:1, '[V]');
    END;

    BEGIN
      ClrScr;
      czolowka;
      czytajdane;
      obliczenia;
      napisy;
    END.
```

T. WYSOCKI, L. J. WEISS, F. WYSOCKA-SCHILLAK

THE EXPONENTIAL APROXIMATION OF BIPOLAR TRANSISTOR STATIC OUTPUT CHARACTERISTICS

Summary

The paper deals with application of exponential function $W_w(x)$ to approximate description of static output characteristic and of output characteristics family of low power bipolar transistor operated in common emiter circuit. The article contains a numerical example and a graphic display program for minicomputer.

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, z. 1–2, SS. 117–139

621.375: 681.31

Wpływ parametrów wzmacniacza pomiarowego na pomiar składowych immitancji dwójników za pomocą detektorów fazoczułych

ANATOL JAWOREK

Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk

Otrzymano 1990.02.28

Autoryzowano do druku 1990.08.06

Pomiar składowej rzeczywistej i urojonej immitancji dwójników biernych za pomocą detektorów fazoczułych polega na całkowaniu odpowiedzi dwójnika na pobudzenie harmoniczne w ściśle określonych przedziałach kąta fazowego. Detektory fazoczułe umożliwiają niezależny pomiar obu składowych immitancji dwójników w czasie rzeczywistym. Wyznaczono błędy pomiarowe spowodowane przez skończone wzmocnienie i ograniczone pasmo przenoszenia pomiarowego wzmacniacza operacyjnego. Błędy pomiarowe są jednakowe dla wszystkich trzech rozważanych typów detektorów fazoczułych.

1. WSTĘP

Detektor fazoczuły jest układem, na którego wyjściu otrzymuje się sygnał stałonapięciowy proporcjonalny do amplitudy detektowanego sygnału zmiennonapięciowego i jego przesunięcia fazowego względem sygnału odniesienia [1]. Detektory fazoczułe synchroniczne są stosowane do detekcji sygnałów na tle szumów [2–4] lub do detekcji składowych rzeczywistej i urojonej immitancji zespolonej. Potrzeba rozróżnienia składowych immitancji występuje w przypadku diagnostyki sieci elektrycznych i ich elementów lub detekcji sygnałów pochodzących z parametrycznych przetworników pomiarowych o porównywalnym udziale składowych ortogonalnych immitancji.

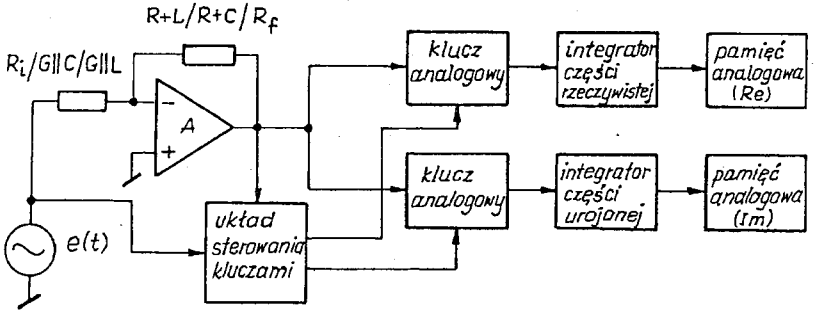
W przypadku stosowania przetworników parametrycznych do pomiarów dynamicznych wielkości szybkozmiennych, gdy wymagane jest szybkie przetwarzanie sygnału niosącego informację o wartości wielkości mierzonej, metody fazoczułe umożliwiają wyznaczenie zmian wartości wielkości mierzonej w czasie rzeczywistym, a więc w czasie nie przekraczającym kilku okresów sygnału zasilającego przetwornik pomiarowy. W niektórych specjalnych rozwiązaniach czas ten może być skrócony do jednego lub nawet do pół okresu.

Ważnym zagadnieniem praktycznym w pomiarach za pomocą detektorów fazoczułych jest poznanie źródeł błędów powstających w czasie przetwarzania sygnału pomiarowego przez detektor i określenie ich wartości liczbowej. Pomimo licznych zastosowań detekcji fazoczułej w aparaturze naukowej i przyrządach pomiarowych [5–9], niewiele prac poświęconych jest zagadnieniu dokładności przetwarzania sygnałów za ich pomocą [5,10,11].

W prezentowanej pracy przedstawiono w skrócie zasadę pomiaru składowych immitancji za pomocą detektorów fazoczułych oraz wyznaczono wpływ parametrów pomiarowego wzmacniacza operacyjnego takich jak skończone wzmocnienie i ograniczone pasmo przenoszenia na wynik pomiaru składowych immitancji.

2. PODSTAWOWE UKŁADY POMIARU IMMITANCJI DWÓJNIKÓW BIERNYCH

Schemat blokowy układu pomiarowego mierzącego składowe immitancji dwójników biernych przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Schemat blokowy detektora fazoczułego

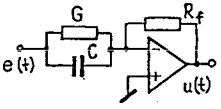
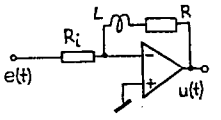
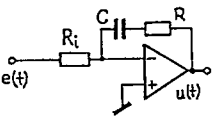
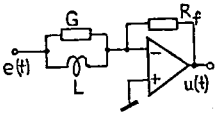
Pomiar składowych immitancji dwójników biernych za pomocą synchronicznych detektorów fazoczułych polega na całkowaniu sygnału odpowiedzi dwójnika na pobudzenie harmoniczne w przedziałach kąta fazowego zależnych od mierzonej składowej immitancji. Wartość całki jest proporcjonalna do mierzonej składowej immitancji.

Badany dwójnik bierny załączony jest w obwodzie wzmacniacza operacyjnego. W tabeli 1 podano cztery podstawowe konfiguracje pomiarowe dla poszczególnych typów dwójników. Dwójnik stanowiący równoległe połączenie konduktancji i pojemności (oznaczany dalej przez G||C) lub równoległe poączenie konduktancji i indukcyjności (ozn. G||L) załączony jest na wejściu inwersyjnym wzmacniacza operacyjnego, a w pętli sprzężenia zwrotnego znajduje się rezystancja wzorcowa R_f. Dwójnik złożony z szeregowo połączonych rezystancji i indukcyjności (ozn. R+L) lub szeregowo połączonej rezystancji i pojemności (ozn. R+C) załączony jest w pętli sprzężenia zwrotnego wzmacniacza operacyjnego a na wejściu wzmacniacza

umieszcza się rezystancję wzorcową R_i. Kąty fazowe przedziałów całkowania dla poszczególnych typów detektorów fazoczułych zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Podstawowe układy pomiarowe immitancji dwójników

Ozn	Układ pomiarowy	Odpowiedź czasowa / Transmitancja	Moduł / Przesun. fazowe
G‖C		$u(t) = -ER_f\lvert Y\rvert \sin(\omega t + \varphi)$ $\frac{\hat{u}}{\hat{e}} = R_f(G + j\omega C)$	$\lvert Y\rvert = \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2}$ $\varphi = \operatorname{atn}\frac{\omega C}{G}$
R+L		$u(t) = \frac{-E}{R_i}\lvert Z\rvert \sin(\omega t + \varphi)$ $\frac{\hat{u}}{\hat{e}} = \frac{1}{R_i}(R + j\omega L)$	$\lvert Z\rvert = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ $\varphi = \operatorname{atn}\frac{\omega L}{R}$
R+C		$u(t) = \frac{-E}{R_i}\lvert Z\rvert \sin(\omega t - \varphi)$ $\frac{\hat{u}}{\hat{e}} = \frac{1}{R_i}(R - j/(\omega C))$	$\lvert Z\rvert = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}$ $\varphi = \operatorname{atn}\frac{1}{R\omega C}$
G‖L		$u(t) = -ER_f\lvert Y\rvert \sin(\omega t - \varphi)$ $\frac{\hat{u}}{\hat{e}} = R_f(G - j/(\omega L))$	$\lvert Y\rvert = \sqrt{G^2 + 1/(\omega L)^2}$ $\varphi = \operatorname{atn}\frac{1}{G\omega L}$

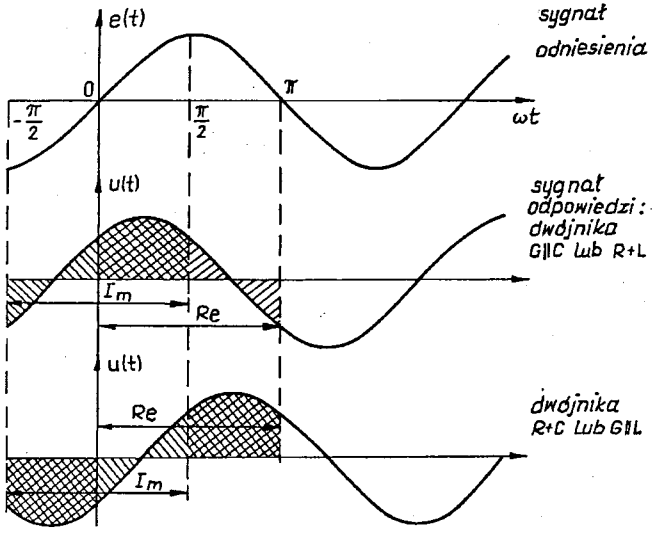
Możliwe jest również zastąpienie rezystancji R_f lub R_i przez pojemność wzorcową [8]. Przedziały całkowania ulegają wówczas zamianie w stosunku do tych podanych w tabeli 1 tzn. składową rzeczywistą mierzy się całkując sygnał odpowiedzi w przedziale właściwym dla składowej urojonej, i odwrotnie. Konfiguracje obwodu pomiarowego podane w tabeli 2 zapewniają proporcjonalność napięć wyjściowych z detektorów fazoczułych do wartości poszczególnych skladowych immitancji.

Przy pobudzeniu każdego z układów sygnałem harmonicznym:

$$e(t) = E\sin(\omega t) \tag{1}$$

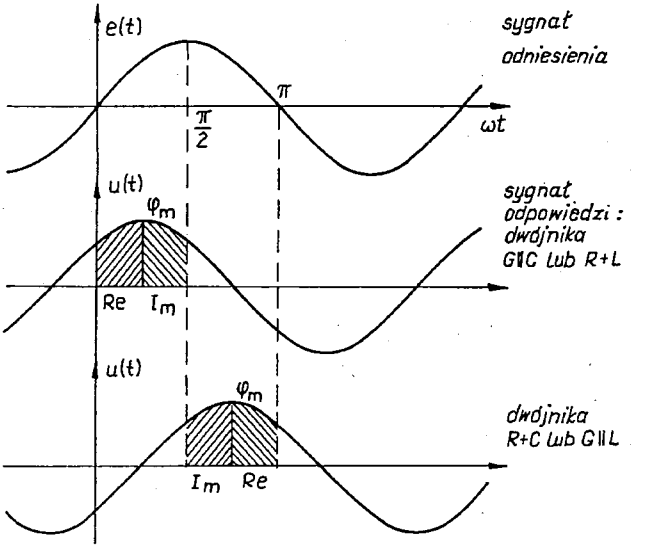
przy czym: E – amplituda, ω – pulsacja generatora zasilającego, na wyjściu idealnego wzmacniacza operacyjnego otrzymuje się napięcia zestawione w tabeli 1. $|Y|$, $|Z|$ jest modułem admitancji i impedancji dwójnika, φ – kątem przesunięcia fazowego sygnału odpowiedzi względem sygnału pobudzającego, który jest jednocześnie sygnałem odniesienia.

Detektor fazoczuły z całkowaniem sygnału odpowiedzi w stałym przedziale, wyznaczonym na podstawie fazy sygnału odniesienia i wynoszącym połowę jego okresu zastosowany został przez Sidgella do pomiaru skladowej urojonej przetwornika pojemnościowego [12]. Zasadę detekcji fazoczułej z zaznaczonymi przedziałami całkowania sygnału odpowiedzi z układu pomiarowego przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Zasada detekcji fazoczułej z całkowaniem w zmiennym przedziale

Podwójnie zakreskowane są te pola pod krzywą, które nie redukują się w wyniku całkowania. Zaletą całkowania w stałym przedziale jest dwukrotnie większe napięcie na wyjściu integratora w porównaniu z układem ze zmiennym przedziałem całkowania. Tłumione są również parzyste harmoniczne sygnału pochodzącego ze wzmacniacza pomiarowego [11].

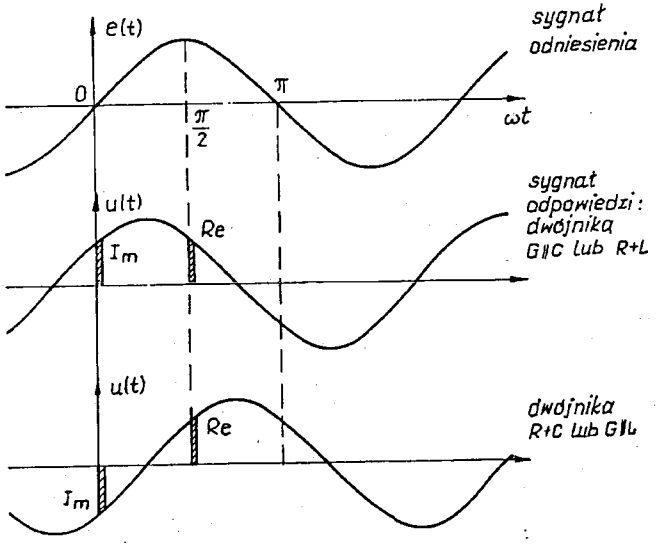


Rys. 3. Zasada detekcji fazoczułej z całkowaniem w stałym przedziale

Detektor fazoczuły z całkowaniem sygnału odpowiedzi w zmiennym przedziale, zależnym od fazy sygnału odniesienia (pobudzenia dwójnika) i kąta fazowe φ_m

odpowiadającego wartości maksymalnej sygnału odpowiedzi badanego dwójnika przedstawiony został przez Jaworka [13]. Przy pomiarze konduktancji dwójnika równoległego G‖C lub szeregowego R+L przedziały całkowania zawierają się w granicach kąta fazowego $<0+2n\pi,\ \pi/2-\varphi+2n\pi>$, $n=0,1,2,...$ Pomiar susceptancji dwójnika G‖C lub R+L polega na całkowaniu odpowiedzi dwójnika w przedziałach $<\pi/2-\varphi+2n\pi,\ \pi/2+2n\pi>$. Pomiaru rezystancji dwójnika szeregowego R+C lub równoległego G‖L dokonuje się całkując napięcie odpowiedzi w przedziałach $<\pi/2+\varphi+2n\pi,\ \pi+2n\pi>$. Przy pomiarach reaktancji dwójnika R+C lub G‖L przedziały całkowania wynoszą $<\pi/2+2n\pi,\ \pi/2+\varphi+2n\pi>$. Odpowiedź czasową układów pomiarowych dwójników z zaznaczonymi przedziałami całkowania przedstawiono na rys. 3.

Detektor fazoczuły z próbkowaniem sygnału odpowiedzi, (sample-and-hold) synchronizowany jest sygnałem odniesienia. Metodę tę wykorzystał Orsini do pomiaru obu składowych immitancji dwójnika równoległego G‖C [10]. W tym typie detekcji fazoczułej polega na pobraniu próbki wartości chwilowej sygnału odpowiedzi w momentach czasu odpowiadających kątom fazowym sygnału odniesienia $0+2n\pi$, $n=0,1,2...$, przy pomiarze składowej urojonej lub $\pi/2+2n\pi$ w przypadku pomiaru składowej rzeczywistej. Kąty fazowe próbkowania nie zależą od konfiguracji dwójnika badanego. Momenty próbkowania i odpowiadające im wartości mierzonych wielkości zaznaczono na wykresie sygnału odpowiedzi dwójników na rys. 4. Detekcja fazoczuła z próbkowaniem należy również do metod całkowych. Próbkowanie sygnału odpowiedzi jest bowiem całkowaniem sygnału pomnożonego przez funkcję Diraca $\delta(\omega t)$.



Rys. 4. Zasada detekcji fazoczułej z próbkowaniem

Wyniki całkowania sygnałów z tabeli 1 w przedziałach z tabeli 2 zestawiono w tabeli 3. W wyrażeniach tabeli 3, dla uproszczenia rozważań założono, że moduł

funkcji przejścia układu całkującego równy jest jedności, natomiast moduł wzmocnienia dla prądu zmiennego w układzie z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego, dla dwójników równoległych G‖C i G‖L zdefiniowano wyrażeniem:

$$K = R_f |Y| \tag{2}$$

Tabela 2

Przedziały całkowania w każdym okresie sygnału odniesienia dla trzech metod detekcji fazoczułej

Metoda	Dwójnik	Składowa immitancji	
		rzeczywista	urojona
stały przedział całkowania	wszystkie	$0 ; \pi$	$-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}$
zmienny przedział całkowania	G‖C, R+L	$0 ; \varphi_m = \frac{\pi}{2} - \varphi$	$\varphi_m = \frac{\pi}{2} - \varphi ; \frac{\pi}{2}$
	R=C, G‖L	$\varphi_m = \frac{\pi}{2} + \varphi ; \pi$	$\frac{\pi}{2} ; \varphi_m = \frac{\pi}{2} + \varphi$
próbkowanie	wszystkie	$\delta(\frac{\pi}{2})$	$\delta(0)$

a dla dwójników szeregowych R+C i R+L wyrażeniem:

$$K = \frac{|Z|}{R_i}. \tag{3}$$

Tabela 3

Napięcia wyjściowe detektorów fazoczułych mierzących składowe immitancji dwójników

metoda	składowa rzeczywista		składowa urojona	
	G‖C, R+L	R+C, G‖L	G‖C, R+L	R+C, G‖L
stały przedział całkowania	$-2EK\cos(\varphi)$	$-2EK\cos(\varphi)$	$-2EK\sin(\varphi)$	$+2EK\sin(\varphi)$
zmienny przedział całkowania	$-EK\cos(\varphi)$	$-EK\cos(\varphi)$	$-EK\sin(\varphi)$	$-EK\sin(\varphi)$
próbkowanie (sample-and-hold)	$-EK\cos(\varphi)$	$-EK\cos(\varphi)$	$-EK\sin(\varphi)$	$+EK\sin(\varphi)$

Dokładniejsze omówienie zasady pomiaru składowych immitancji dwójników biernych za pomocą detektorów fazoczułych można znaleźć w pracy [14].

Oprócz pomiarów elementów swobodnych możliwy jest również pomiar napięcia i prądu na elemencie badanym załączonym w sieci, oddzielonym od źródeł sygnału wieloma innymi elementami biernymi i źródłami sterowanymi. Zagadnienie to zostało przedstawione np. w pracy [9].

3. ODPOWIEDŹ CZASOWA UKŁADU ZE WZMACNIACZEM RZECZYWISTYM

W celu uogólnienia rozważań, w dalszej części pracy przyjęte zostały oznaczenia podane w tabeli 4.

Tabela 4

Definicje zmiennych używanych w równaniach dla poszczególnych typów dwójników

zmienna	dwójnik			
	G‖C	R+L	R+C	G‖L
$K_r =$	GR_f	$\frac{R}{R_i}$	$\frac{R}{R_i}$	GR_f
$T =$	CR_f	$\frac{L}{R_i}$	CR_i	$\frac{L}{R_f}$
$D =$	$\frac{\omega C}{G}$	$\frac{\omega L}{R}$	ωCR	ωLG

Wzmacniacz operacyjny o skończonym wzmocnieniu i ograniczonym paśmie przenoszonych częstotliwości, w najprostszym przypadku opisany jest funkcją z jednym biegunem:

$$A = A_0 \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0}, \tag{4}$$

przy czym: A_0 – stałoprądowe wzmocnienie wzmacniacza z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, ω_0 – pulsacja graniczna.

Dla układu pomiarowego dwójnika równoległego G‖C transformata Laplace'a napięcia odpowiedzi przy pobudzeniu ukladu sygnałem harmonicznym (1) i zerowych warunkach początkowych ma postać:

$$\bar{u} = -ER_f(G + sC) \frac{\frac{\omega}{s + \omega^2}}{1 + \frac{s^2 + \omega_0}{A_0 \omega_0}\left(1 + R_f(G + sC)\right)}. \tag{5}$$

Natomiast dla układu pomiarowego dwójnika szeregowego R+L:

$$\bar{u} = -E\frac{R + sL}{R_i} \frac{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}{1 + \frac{s + \omega_0}{A_0 \omega_0}\left(1 + \frac{R + sL}{R_i}\right)}. \tag{6}$$

Uwzględniając, że bieguny transmitancji dla obu układów wynoszą (por. oznaczenia w tabeli 4):

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2T}\Big[1 + K_r + \omega_0 T \pm \pm \sqrt{(1 + K_r + \omega_0 T)^2 - 4\omega_0 T(1 + K_r + A_0)}\Big] \tag{7}$$

równania (5) i (6) można przekształcić do postaci:

$$\tilde{u} = EA_0 \frac{\omega\omega_0}{\alpha_2 - \alpha_1}\left[\frac{1}{Ds^2 + \omega^2}\left(\frac{1}{s + \alpha_2} - \frac{1}{s + \alpha_1}\right) + \frac{s}{s^2 + \omega^2}\left(\frac{1}{s + \alpha_2} - \frac{1}{s + \alpha_1}\right)\right]. \tag{8}$$

Stosując do równania (8) odwrotną transformację Laplace'a otrzymuje się odpowiedź czasową układu, w stanie ustalonym ($t \to \infty$):

$$u(t) = E\frac{-A_0\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{\alpha_2}{\omega} - \frac{\alpha_1}{\omega}}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\alpha_2}{\omega}\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right)\right] + \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\alpha_2}{\omega}\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right)\right]. \tag{9}$$

Funckja (8) może posiadać bieguny zespolone jeśli w zależności (7) wyrażenie pod pierwiastkiem jest ujemne, tzn. dla pulsacji względnych ω/ω_0 spełniających warunek:

$$\frac{T(1 + K_r + 2A_0)}{(1 + K_r)^2}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1 + K_r}{1 + K_r + 2A_0}\right)^2}\right) < \frac{\omega}{\omega_0} < \frac{T(1 + K_r + 2A_0)}{(1 + K_r)^2}\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1 + K_r}{1 + K_r + 2A_0}\right)^2}\right). \tag{10}$$

Bieguny zespolone $\alpha_{1,2}$ można przedstawić w postaci wykładniczej:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = |\alpha| \exp(j\chi), \quad \alpha_2 = |\alpha| \exp(-j\chi) \\ &|\alpha| = \frac{1}{2T}\sqrt{2\,(1 + K_r + \omega_0 T)^2 - 4\omega_0 T(1 + K_r + A_0)} \\ &\chi = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{4\omega_0 T(1 + K_r + A_0)}{(1 + K_r + \omega_0 T)^2} - 1}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Dla biegunów zespolonych odpowiedź (9) pozostaje nadal funkcją rzeczywistą i ma postać:

$$u(t) = \frac{A_0 E \frac{\omega_0}{\omega}}{1 + 2\frac{|\alpha|^2}{\omega^2}\cos(2\chi) + \frac{|\alpha|^4}{\omega^4}}\left[\frac{1}{D}\left(\left(1 - \frac{|\alpha|^2}{\omega^2}\right)\sin(\omega t) + 2\frac{|\alpha|}{\omega}\cos(\chi)\cos(\omega t)\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\left(1 - \frac{|\alpha|^2}{\omega^2}\right)\cos(\omega t) - 2\frac{|\alpha|}{\omega}\cos(\chi)\sin(\omega t)\right)\right]. \tag{12}$$

Układ pomiarowy dwójnika szeregowego R+C, po uwzględnieniu ograniczonego pasma przenoszenia wzmacniacza operacyjnego i skończonego wzmocnienia, opisany jest równaniem operatorowym:

$$\bar{u} = -E\frac{R + \frac{1}{sC}}{R_i} \cdot \frac{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}{1 + \frac{s + \omega_0}{A_0\omega_0}\left(1 + \frac{R + \frac{1}{sC}}{R_i}\right)}, \tag{13}$$

a układ pomiarowy dwójnika równoległego G||L, równaniem:

$$\bar{u} = -ER_f\left(G + \frac{1}{sL}\right) \cdot \frac{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}{1 + \frac{s + \omega_0}{A_0\omega_0}\left(1 + R_f\left(G + \frac{1}{sL}\right)\right)}. \tag{14}$$

Po wyznaczeniu biegunów transmitancji (por. tabela 4):

$$\gamma_{1,2} = \frac{\omega_0}{2(1 + K_r)}\left[1 + K_r + A_0 + \frac{1}{\omega_0 T} \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\left(1 + K_r + A_0 + \frac{1}{\omega_0 + T}\right)^2 - \frac{4}{\omega_0 T}\left(1 + K_r\right)}\right] \tag{15}$$

równania (13) i (14) można przekształcić do postaci:

$$\bar{u} = \frac{EA_0}{1 + \frac{1}{K_r}} \frac{\omega\omega_0}{\gamma_2 - \gamma_1} \times \left[\frac{1}{D} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{s + \gamma_2} - \frac{1}{s + \gamma_1}\right) + \frac{s}{s^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{s + \gamma_2} - \frac{1}{s + \gamma_1}\right)\right]. \tag{16}$$

Stosując do (16) odwrotną transformację Laplace'a otrzymuje się rozwiązanie w dziedzinie czasu, które w stanie ustalonym, przy $t \to \infty$ ma postać:

$$u(t) = \frac{-EA_0}{1 + \frac{1}{K_r}\frac{\gamma_2}{\omega} - \frac{\gamma_1}{\omega}} \frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{} \left[\frac{1}{D}\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right) + \right.\right.$$
$$- \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right) +$$
$$\left.\left. + \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right)\right] \tag{17}$$

Bieguny funkcji (16) przyjmują zawsze wartości rzeczywiste, gdyż wyrażenie pod pierwiastkiem (15) jest zawsze większe od zera, dla rzeczywistych częstotliwości ω/ω_0.

W następnych rozdziałach wyznaczona zostanie względna odchyłka wyniku pomiaru składowych immitancji za pomocą rozważanych detektorów fazoczułych spowodowana przez skończone wzmocnienie i ograniczone pasmo przenoszenia wzmacniacza pomiarowego, zdefiniowana wyrażeniem:

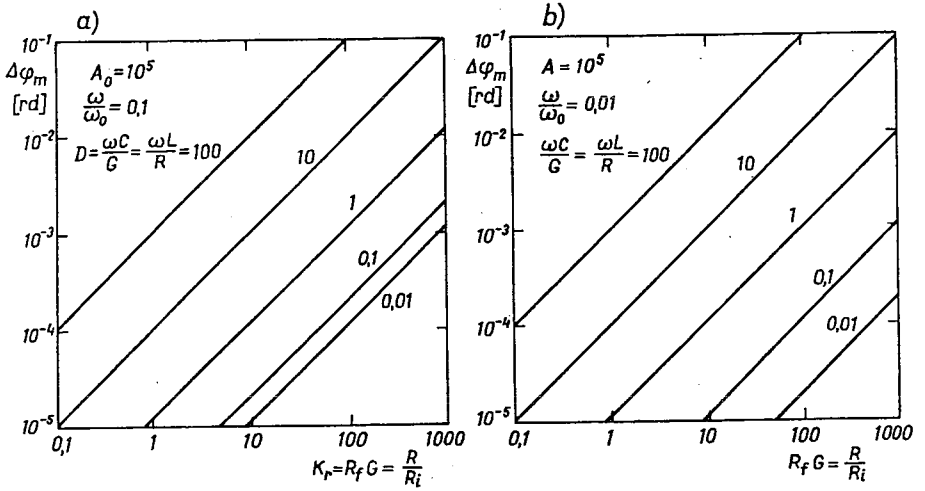
$$\delta_\omega = \frac{\int_{\varphi_d}^{\varphi_g} u(\omega t | A_0 = \infty,\ \omega_0 = \infty)\, d\omega t - \int_{\varphi_d}^{\varphi_g} u(\omega t | A_0 < \infty,\ \omega_0 < \infty)\, d\omega t}{\int_{\varphi_d}^{\varphi_g} u(\omega t | A_0 = \infty,\ \omega_0 = \infty)\, d\omega t}, \tag{18}$$

przy czym φ_d i φ_g są kątami fazowymi początku i końca przedziału całkowania właściwymi dla danej metody i danej składowej immitnacji, podanymi w tabeli 2. Pierwsza całka w liczniku i całka w mianowniku jest wynikiem całkowania przez układ pomiarowy w przypadku idealnego wzmacniacza operacyjnego. Druga całka w liczniku jest wynikiem całkowania sygnału $u(\omega t)$ z wyjścia rzeczywistego wzmacniacza pomiarowego.

4. DETEKTOR FAZOCZUŁY Z CAŁKOWANIEM W ZMIENNYM PRZEDZIALE

W detektorze fazoczułym z całkowaniem w zmiennym przedziale jedna z granic całkowania sygnału odpowiedzi jest zależna od kąta przesunięcia fazowego sygnału odpowiedzi względem sygnału odniesienia. Kąt fazowy φ_m (tzn. kąt fazowy wartości maksymalnej sygnału odpowiedzi) jest jedną z granic całkowania w tej metodzie detektacji fazoczułej. Odchyłka kąta φ_m od wartości nominalnej spowodowane przez parametry nieidealnego wzmacniacza operacyjnego wpływają na wynik całkowania i są źródłem błędu pomiarowego. Zależność φ_m od parametrów wzmacniacza i mierzonej immitancji oblicza się z pochodnej sygnału odpowiedzi (9), $du(t)/d\omega t$, w wyniku czego otrzymuje się:

$$\operatorname{tg}(\varphi_m) = \frac{\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}\left(\dfrac{1}{D}\dfrac{\alpha_1}{\omega}+1\right) - \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\left(\dfrac{1}{D}\dfrac{\alpha_2}{\omega}+1\right)}{\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}\left(\dfrac{\alpha_1}{\omega}-\dfrac{1}{D}\right) - \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\left(\dfrac{\alpha_2}{\omega}-\dfrac{1}{D}\right)}. \tag{19}$$



Rys. 5. Przesunięcie kąta fazowego wartości maksymalnej φ_m w układzie pomiarowym dwójników G‖C lub R+L, dla $\omega/\omega_0=0.1$ (a), $\omega/\omega_0=0{,}01$ (b)

Wyrażenie (19) odnosi się do przypadku, gdy bieguny transmitancji (8) są rzeczywiste. Dla biegunów zespolonych do wyrażenia (19) podstawia się (11) otrzymując:

$$\operatorname{tg}(\varphi_m) = \frac{\frac{1}{D}\left(\frac{|\alpha|^2}{\omega} - 1\right)\sin(\chi) + \frac{|\alpha|}{\omega}\sin(2\chi)}{\left(\frac{|\alpha|^2}{\omega} - 1\right)\sin(\chi) - \frac{1}{D}\frac{|\alpha|}{\omega}\sin(2\chi)}. \tag{20}$$

Różnica wartości kąta fazowego φ_m dla rzeczywistego i idealnego wzmacniacza operacyjnego dla stosunku częstotliwości generatora do częstotliwości granicznej wzmacniacza $\omega/\omega_0 = 0.1$ i dla $\omega/\omega_0 = 0.01$ przedstawiona została na rys. 5. Wpływ pasma przenoszenia wzmacniacza pomiarowego na kąt przesunięcia fazowego jest większy dla dwójników o charakterze reaktancyjnym.

Jak zostanie wykazane, po uwzględnieniu w wyrażeniu (18) wartości kąta fazowego przedziału całkowania (19) lub (20) błędy pomiaru za pomocą tej metody detekcji fazoczułej są takie same jak dla pozostałych typów detektorów fazoczułych.

Napięcie sygnału na wyjściu detektora fazoczułego oblicza się całkując sygnał odpowiedzi (9) w odpowiednich przedziałach kąta fazowego. Dla składowej rzeczywistej całkowanie w granicach od 0 do φ_m daje rezultat:

$$\int_0^{\varphi_m} u(\omega t)\,\mathrm{d}\omega t = \frac{-EA_0\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{\alpha_2}{\omega} - \frac{\alpha_1}{\omega}}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}\left(-\frac{\alpha_1}{\omega}\cos(\varphi_m) - \sin(\varphi_m) + \frac{\alpha_1}{\omega}\right) + \right.\right.$$
$$- \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\left(-\frac{\alpha_2}{\omega}\cos(\varphi_m) - \sin(\varphi_m) + \frac{\alpha_2}{\omega}\right)\Bigg] +$$
$$+ \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\sin(\varphi_m) - \cos(\varphi_m) + 1\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\alpha_2}{\omega}\sin(\varphi_m) - \right.$$
$$\left.\left. - \cos(\varphi_m) + 1\right)\right]. \tag{21}$$

Po podstawieniu (21) do (18) i po uwzględnieniu (19) otrzymuje się wyrażenie na wartość względnego błędu pomiaru składowej rzeczywistej immitancji:

$$\delta_{\omega Re} = 1 - \frac{A_0}{K_r}\frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{\alpha_2}{\omega} - \frac{\alpha_1}{\omega}}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{\frac{\alpha_1}{\omega}}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2} - \frac{\frac{\alpha_2}{\omega}}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\right]. \tag{22}$$

Dla zespolonych biegunów transmitancji (8), po uwzględnieniu (11) otrzymuje się:

$$\delta_{\omega Re} = 1 - \frac{A_0}{K_r} \frac{1 - \dfrac{1 + K_r + A_0}{T} \dfrac{1}{D}}{1 + \left(\dfrac{1 + K_r + A_0}{T}\right)^2}. \tag{23}$$

Dla składowej urojonej immitancji całka sygnału odpowiedzi (9) obliczona w granicach od φ_m do $\pi/2$ wynosi:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_m}^{\frac{\pi}{2}} u(\omega t)\,\mathrm{d}\omega t = \frac{-EA_0\dfrac{\omega_0}{\omega}}{\dfrac{\alpha_2}{\omega} - \dfrac{\alpha_1}{\omega}} \Bigg[& \frac{1}{D}\left(\frac{1}{1 + \left(\dfrac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\cos(\varphi_m) + \sin(\varphi_m) - 1\right) + \right. \\ & - \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\alpha_2}{\omega}\cos(\varphi_m) + \sin(\varphi_m) - 1\right) + \\ & + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\alpha_1}{\omega}(1 - \sin(\varphi_m)) + \cos(\varphi_m)\right) + \\ & \left. - \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\alpha_2}{\omega}(1 - \sin(\varphi_m)) + \cos(\varphi_m)\right)\right].\end{aligned} \tag{24}$$

Po podstawieniu (24) do (18) i po uwzględnieniu wyrażenia na kąt fazowy φ_m (19) otrzymuje się wyrażenie na błąd pomiaru składowej urojonej:

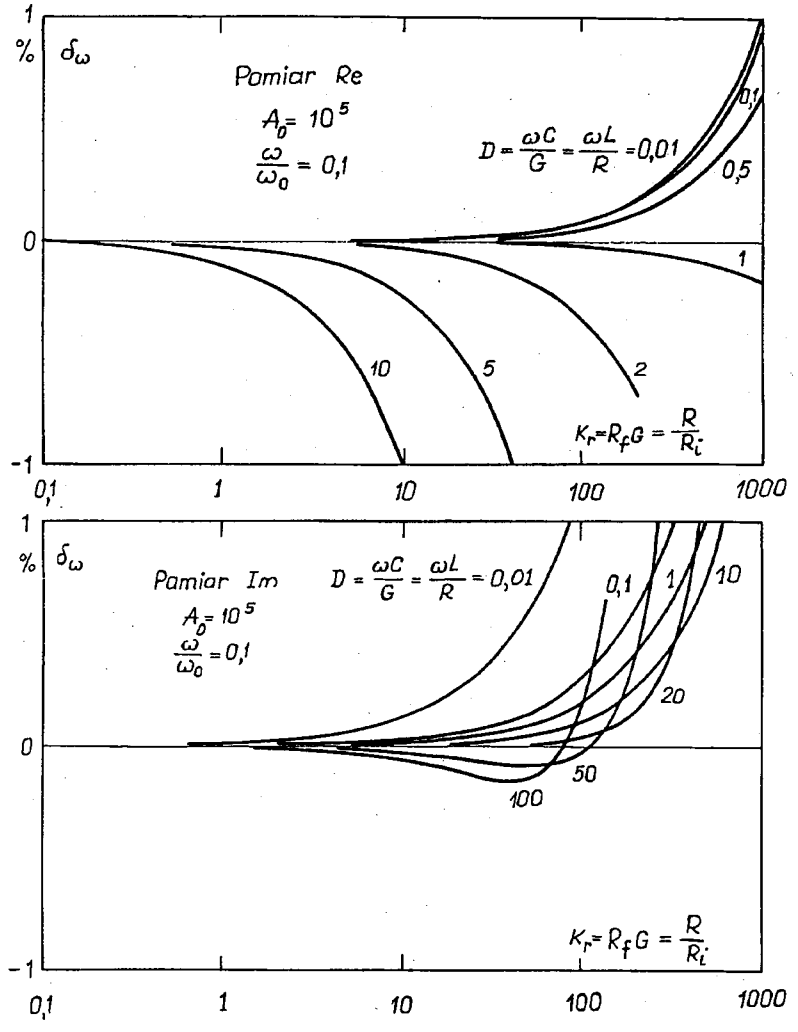
$$\begin{aligned}\delta_{\omega Im} = 1 - \frac{A_0}{\omega T} \frac{\dfrac{\omega_0}{\omega}}{\dfrac{\alpha_2}{\omega} - \dfrac{\alpha_1}{\omega}} \Bigg[& \frac{-1}{D}\left(\frac{1}{1 + \left(\dfrac{\alpha_1}{\omega}\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\right) + \\ & + \frac{\dfrac{\alpha_1}{\omega}}{1 + \left(\dfrac{\alpha_1}{\omega}\right)^2} - \frac{\dfrac{\alpha_2}{\omega}}{1 + \left(\dfrac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\Bigg]\end{aligned} \tag{25}$$

Gdy bieguny transmitancji (8) są zespolone to po uwzględnieniu (11) otrzymuje się:

$$\delta_{\omega Im} = 1 - \frac{A_0}{\omega T} \frac{-\dfrac{1}{D} - \dfrac{1 + K_r + A_0}{T}}{1 + \left(\dfrac{1 + K_r + A_0}{T}\right)^2}. \tag{26}$$

Wykresy wartości bezwzględnej błędów pomiaru składowej rzeczywistej i urojonej immitancji dwójnika równoległego G‖C lub szeregowego R+L w zależności od

parametrów K_r i D charakteryzujących dwójnik przedstawiono na rys. 6 dla $A_0 = 10^5$ i $\omega/\omega_0 = 0{,}1$ oraz na rys. 7 dla $\omega/\omega_0 = 0{,}01$. Przy pomiarze składowej rzeczywistej, gdy $\omega C/G \cong 1$ następuje zmiana znaku błędu. Błędy pomiaru składowych immitancji zależą nie tylko od parametrów wzmacniacza pomiarowego lecz także od wartości mierzonych wielkości. Błąd jest większy dla dwójników z przewagą składowej urojonej.

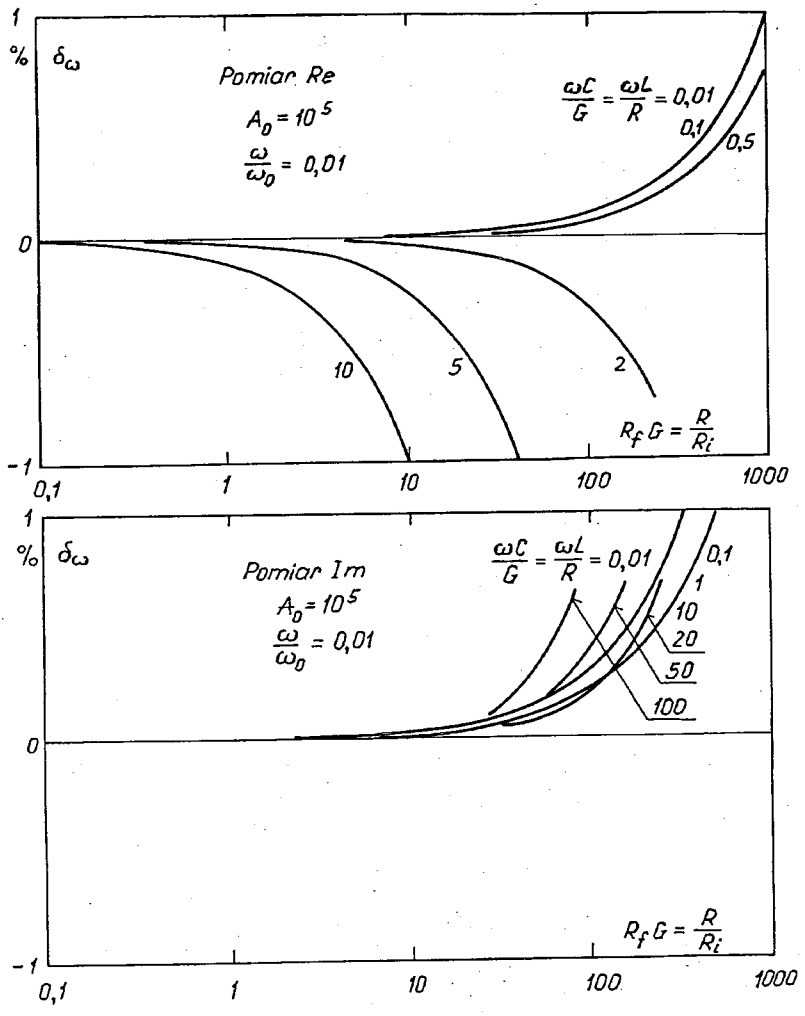


Rys. 6. Błąd pomiaru składowej rzeczywistej (a) i urojonej (b) dwójników G‖C i R+L spowodowany przez skończone wzmocnienie i ograniczone pasmo przenoszenia wzmacniacza operacyjnego dla $\omega/\omega_0 = 0{,}1$

Dla dwójników R+C oraz G‖L błędy pomiaru wyznacza się analogicznie. Kąt fazowy, dla którego sygnał odpowiedzi osiąga maksimum oblicza się z pochodnej wyrażenia (17), otrzymując:

$$\operatorname{tg}(\varphi_m) = \frac{\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}\left(\dfrac{\gamma_1}{\omega}+1\right) - \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\left(\dfrac{\gamma_2}{\omega}+1\right)}{\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}\left(\dfrac{\gamma_1}{\omega}-\dfrac{1}{D}\right) - \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\left(\dfrac{\gamma_2}{\omega}-\dfrac{1}{D}\right)} \tag{27}$$

Całka z sygnału odpowiedzi (17) obliczona w granicach od φ_m do π wynosi:



Rys. 7. Błąd pomiaru składowej rzeczywistej (a) i urojonej (b) dwójników G‖C i R+L spowodowany przez skończone wzmocnienie i ograniczone pasmo przenoszenia wzmacniacza operacyjnego dla $\omega/\omega_0 = 0{,}01$

$$\int_{\varphi_m}^{\pi} u(\omega t)\,\mathrm{d}\omega t = \frac{-EA_0}{1+\frac{1}{K_r}\frac{\gamma_2}{\omega}-\frac{\gamma_1}{\omega}}\frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\gamma_1}{\omega}(1+\cos(\varphi_m))+\sin(\varphi_m)\right)+\right.\right.$$
$$-\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\gamma_2}{\omega}(1+\cos(\varphi_m))+\sin(\varphi_m)\right)\Bigg)+$$
$$+\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}\left(-\frac{\gamma_1}{\omega}\sin(\varphi_m)+\cos(\varphi_m)+1\right)-\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\left(-\frac{\gamma_2}{\omega}\sin(\varphi_m)+\right.$$
$$\left.\left.+\cos(\varphi_m)+1\right)\right]. \tag{28}$$

Korzystając ze wzoru (18) i (28) oblicza się błąd pomiaru składowej rzeczywistej dwójnika R+C lub G‖L, spowodowany skończonym wzmocnieniem i ograniczonym pasmem przenoszenia pomiarowego wzmacniacza operacyjnego:

$$\delta_{\omega Re} = 1-\frac{\frac{A_0}{K_r}}{1+\frac{1}{K_r}\frac{\gamma_2}{\omega}-\frac{\gamma_1}{\omega}}\frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{\frac{\gamma_1}{\omega}}{1+\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}-\frac{\frac{\gamma_2}{\omega}}{1+\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\right]. \tag{29}$$

Całka sygnału odpowiedzi (17) obliczona w granicach $\pi/2$ do φ_m wynosi:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_m} u(\omega t)\,\mathrm{d}\omega t = \frac{-EA_0}{1+\frac{1}{K_r}\frac{\gamma_2}{\omega}-\frac{\gamma_1}{\omega}}\frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}\left(-\frac{\gamma_1}{\omega}\cos(\varphi_m)-\sin(\varphi_m)+1\right)+\right.\right.$$
$$-\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\left(-\frac{\gamma_2}{\omega}\cos(\varphi_m)-\sin(\varphi_m)+1\right)\Bigg)+$$
$$+\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\sin(\varphi_m)-\cos(\varphi_m)-\frac{\gamma_1}{\omega}\right)-\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\sin(\varphi_m)-\right.$$
$$\left.\left.-\cos(\varphi_m)-\frac{\gamma_2}{\omega}\right)\right]. \tag{30}$$

Obliczony z (18) błąd pomiarowy składowej urojonej ma postać:

$$\delta_{\omega Im} = 1 - \frac{A_0 T\omega}{1 + \frac{1}{K_r}\frac{\gamma_2}{\omega} - \frac{\gamma_1}{\omega}} \frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\left[\frac{-1}{D}\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\right) + \right.}$$

$$\left. + \frac{\frac{\gamma_1}{\omega}}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2} - \frac{\frac{\gamma_2}{\omega}}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\right]. \tag{31}$$

Wykresy błędów (29) i (31) w zależności od parametrów K_r i D charakteryzujących dwójnik dla wzmocnienia $A_0 = 10^5$ i częstotliwości względnej $\omega/\omega_0 = 0{,}1$ przedstawiono na rys. 8 oraz na rys. 9 dla $\omega/\omega_0 = 0{,}01$. Gdy $\omega CR \cong 1$ przy pomiarze składowej rzeczywistej następuje zmiana znaku błędu.

5. DETEKTOR FAZOCZUŁY Z CAŁKOWANIEM W STAŁYM PRZEDZIALE

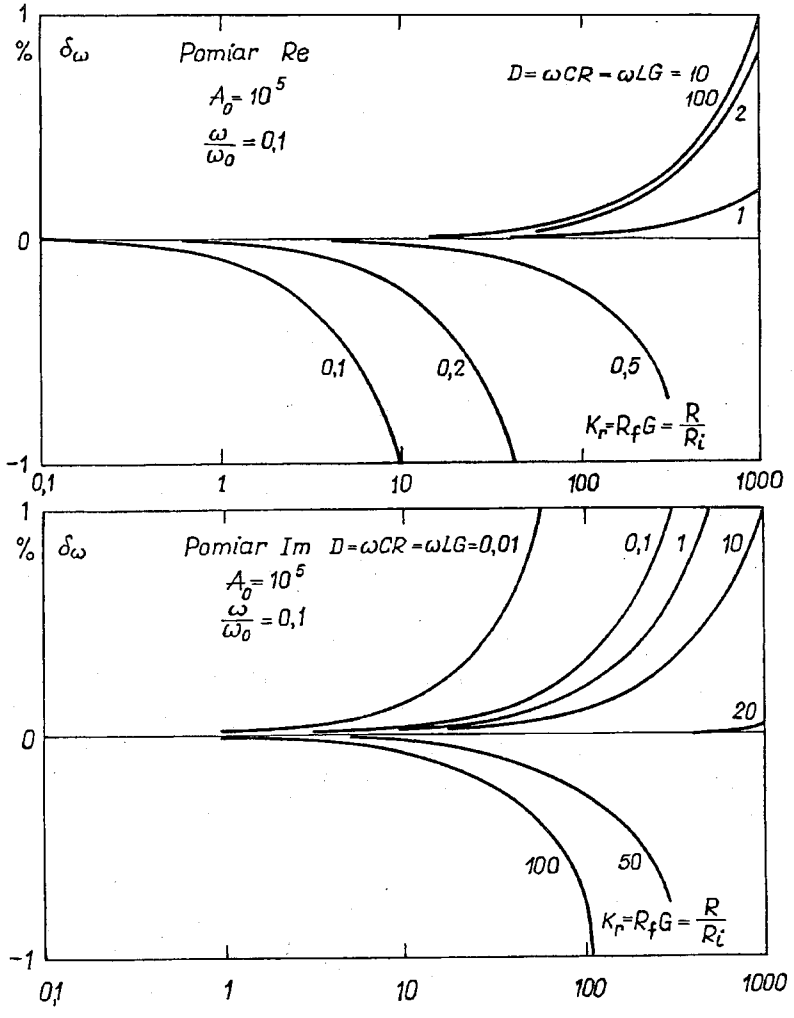
W metodzie detekcji fazoczułej z całkowaniem sygnału odpowiedzi w stałym przedziale błędy pomiarowe wyznacza się z zależności (18), w której umieszcza się wartość całki z sygnału odpowiedzi (9) obliczoną w przedziale od 0 do π, w przypadku pomiaru składowej rzeczywistej lub od $-\pi/2$ do $+\pi/2$, przy pomiarze składowej urojonej immitancji. Dla dwójnika równoległego G||C lub szeregowego R+L otrzymuje się:

$$\int_0^{\pi} u(\omega t)\, d\omega t = \frac{-EA_0 \frac{2\omega_0}{\omega}}{\frac{\alpha_2}{\omega} - \frac{\alpha_1}{\omega}} \left[\frac{1}{D}\left(\frac{\frac{\alpha_1}{\omega}}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2} - \frac{\frac{\alpha_2}{\omega}}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\right] \tag{32}$$

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} u(\omega t)\, d\omega t = \frac{-EA_0 \frac{2\omega_0}{\omega}}{\frac{\alpha_2}{\omega} - \frac{\alpha_1}{\omega}} \left[\frac{-1}{D}\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\right) + \right.$$

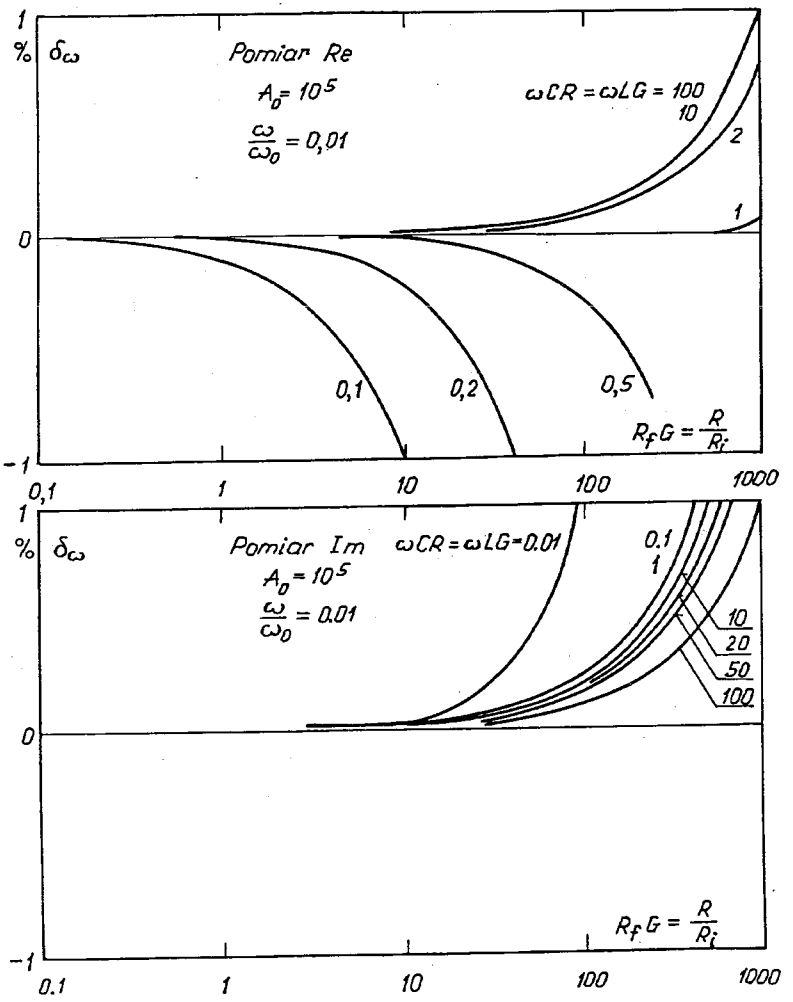
$$\left. + \frac{\frac{\alpha_1}{\omega}}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2} - \frac{\frac{\alpha_2}{\omega}}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\right] \tag{33}$$



Rys. 8. Błąd pomiaru składowej rzeczywistej (a) i urojonej (b) dwójników R+C i G||L spowodowany przez skończone wzmocnienie i ograniczone pasmo przenoszenia wzmacniacza operacyjnego dla $\omega/\omega_0 = 0{,}1$

Po podstawieniu (32) i (33) do wyrażenia definicyjnego (18) otrzymuje się zależności identyczne z (22), (23), (25) i (26). Wynika stąd, że błędy pomiaru składowej rzeczywistej i urojonej za pomocą tej metody są identyczne jak w detektorze fazoczułym z całkowaniem w zmiennym przedziale. Wykresy przedstawione na rys. 6 i 7 odnoszą się również do detektora fazoczułego z całkowaniem w stałym przedziale.

Dla dwójnika szeregowego R+C lub równoległego G||L całki z sygnału odpowiedzi (17) wynoszą:



Rys. 9. Błąd pomiaru składowej rzeczywistej (a) i urojonej (b) dwójników R + C i G‖L spowodowany przez skończone wzmocnienie i ograniczone pasmo przenoszenia wzmacniacza operacyjnego dla $\omega/\omega_0 = 0{,}01$

$$\int_0^{\pi} u(\omega t)\, d\omega t = \frac{-EA_0}{1 + \frac{1}{K_r}\frac{\gamma_2}{\omega} - \frac{\gamma_1}{\omega}} \frac{\frac{2\omega_0}{\omega}}{} \times \left[\frac{1}{D}\left(\frac{\frac{\gamma_1}{\omega}}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2} - \frac{\frac{\gamma_2}{\omega}}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\right] \qquad (34)$$

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} u(\omega t)\,\mathrm{d}\omega t = \frac{-EA_0}{1+\frac{1}{K_r}\frac{\frac{2\omega_0}{\omega}}{\frac{\gamma_2}{\omega}-\frac{\gamma_1}{\omega}}} \times \left[\frac{1}{D}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{\gamma_1}{\omega}}{1+\left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2}-\frac{\frac{\gamma_2}{\omega}}{1+\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\right]. \tag{35}$$

Po podstawieniu (34) i (35) do (18) otrzymuje się zależności określające błędy pomiaru identyczne z (29) i (31). Wyniki obliczeń na rys. 8 i 9.

6. DETEKTOR FAZOCZUŁY Z PRÓBKOWANIEM

Dla detektora fazoczułego z próbkowaniem, względną różnicę wyniku pomiaru w układzie ze wzmacniaczem rzeczywistym i idealnym definiuje się za pomocą wyrażenia:

$$\delta_\omega = \frac{u(\omega t_p|A_0=\infty,\ \omega_0=\infty) - u(\omega t_p|A_0<\infty,\ \omega_0<\infty}{u(\omega t_p|A_0=\infty,\ \omega_0=\infty)}, \tag{36}$$

przy czym ωt_p – kąt fazowy próbkowania sygnału odpowiedzi.

Wartość napięcia próbkowanego dla rzeczywistego wzmacniacza pomiarowego, wynosi:
dla składowej rzeczywistej dwójników G‖C i R+L:

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = E\frac{\frac{-A_0\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{\alpha_2}{\omega}-\frac{\alpha_1}{\omega}}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{\frac{\alpha_1}{\omega}}{1+\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}-\frac{\frac{\alpha_2}{\omega}}{1+\left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\right)+\right.}{}$$

$$\left.+\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\right] \tag{37}$$

i dla składowej urojonej:

$$u(0) = E\frac{\frac{-A_0\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{\alpha_2}{\omega}-\frac{\alpha_1}{\omega}}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{-1}{1+\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\right)+\frac{\frac{\alpha_1}{\omega}}{1+\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)^2}-\right.}{}$$

$$- \frac{\frac{\alpha_2}{\omega}}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)^2}\Bigg]. \tag{38}$$

Dla dwójników R+C i G||L wyniki próbkowania są następujące:
dla składowej rzeczywistej:

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-EA_0}{1 + \frac{1}{K_r}\frac{\gamma_2}{\omega} - \frac{\gamma_1}{\omega}}\frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{}\Bigg[\frac{1}{D}\left(\frac{\frac{\gamma_1}{\omega}}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2} - \frac{\frac{\gamma_2}{\omega}}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\Bigg] \tag{39}$$

dla składowej urojonej:

$$u(0) = \frac{-EA_0}{1 + \frac{1}{K_r}\frac{\gamma_2}{\omega} - \frac{\gamma_1}{\omega}}\frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{}\Bigg[\frac{1}{D}\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\right) + \frac{\frac{\gamma_1}{\omega}}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\omega}\right)^2} - \frac{\frac{\gamma_2}{\omega}}{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2}\Bigg]. \tag{40}$$

Otrzymane wyrażenia na wartość sygnału próbkowanego różnią się od wyrażeń dla sygnałów wyjściowych z detektora fazoczułego z całkowaniem w stałym przedziale tylko o czynnik 2. Lecz po podstawieniu wartości napięć sygnału odpowiedzi w momentach próbkowania (37)–(40) dla wszystkich mierzonych składowych immitancji poszczególnych dwójników do wyrażenia (36), otrzymuje się błędy przetwarzania identyczne z wyrażeniami uzyskanymi dla pozostałych dwóch typów detektorów fazoczułych.

ZAKOŃCZENIE

Przedstawiono zasadę pomiaru składowych rzeczywistej i urojonej immitancji dwuelementowych i liniowych dwójników biernych za pomocą trzech typów detektorów fazoczułych. Detektory fazoczułe są w szczególności przydatne w pomiarach dynamicznych za pomocą parametrycznych przetworników pomiarowych typu RLC, przy porównywalnym udziale składowych ortogonalnych w mierzonej immitancji.

Obliczone wartości błędów spowodowanych przez parametry rzeczywistego wzmacniacza pomiarowego ($A_0 < \infty$, $\omega_0 < \infty$), w którego obwodzie umieszcza się mierzoną immitancję są identyczne dla wszystkich trzech rozważanych typów detektorów fazoczułych. Oznacza to, że na wartość błędów pomiaru spowodowanego przez parametry wzmacniacza nie ma wpływu sposób dalszej obróbki sygnału pomiarowego, tzn. przedział całkowania. Odnosi się to również do detektora fazoczułego z całkowaniem w zmiennym przedziale, w którym przedział całkowania zależny jest od fazy mierzonego sygnału.

BIBLIOGRAFIA

1. G. B. Clayton: *Experiments with operational amplifiers.* Pt. 11: An op-amp used as a phase seniative detector. Wireless World, July 1973, 355–6
2. B. Leskovar: *Generalized Analysis of Phase-Sensitive Detection-Circuit Operating Characteristics at the Signal Detection in the Presence of Noise.* IEEE Trans. Instrum. Meas. 21 1972 No 1. 15–23
3. D. P. Blair, D. P. Syndenham: *Phase-sensitive detection as a means to recover signals buried in noise.* J. Phys. E.: Sci. Instrum. 8 1975 No 8, 621–7
4. H. Fisher: *Lock-in amplifiers obtain measurements even if there is more noise than signal.* Laser Focus, Nov. 1977, 82–8
5. J. Hoja: *Optymalizacja parametrów detektora fazoczułego przy niekorzystnym stosunku składowych ortogonalnych sygnału pomiarowego.* XVII Międzyuczelniana Konferencja Meteorologów, Poznań, Wrzesień 1984
6. C. T. Morse: *A computer controlled apparatus for measuring ac properties of materials over the frequency range 10^{-5} to 10^5 Hz.* J. Phys. E.: Sci Instrum. 7 1974, 657–62
7. K. Maeda: *An Automatic Precision 1 MHz Digital LCR Meter.* Hewlett-Packard J., March 1974, 2–9
8. J. C. R. Richards: *Some aspects of transducer immittance measurement.* J. Phys. E: Sci. Instrum. 15 1982, 1251–56
9. J. Hoja: *Metoda pomiarowa parametrów elementów RLC wykorzystująca sygnały proporcjonalne do prądu i napięcia na elemencie mierzonym.* Rozprawy Elektrotechniczne. 30 1984 Nr 3, 643–58
10. L. Q. Orsini: *Conversion of immittance parameters to dc voltage.* IEEE Trans. Instrum. Meas. 21 1973 No 3, 196–8
11. A. Jaworek: *Pomiar składowych immitancji dwójników biernych za pomocą detektorów fazoczułych.* PAK (w druku)
12. J. E. Sigdell: *A principle for capacitance measurement, suitable for linear evaluation of capacitance transducers.* IEEE Trans. Instrum. Meas. 21 1972 No 1, 60–4
13. A. Jaworek: *Pomiary składowych impedancji dwójników.* PAK 33 1987, Nr 2, 38–9
14. A. Jaworek: *Detektory fazoczułe w pomiarach składowych immitancji dwójników.* Rozpr. Elektrot.

OPERATIONAL AMPLIFIER PARAMETERS INFLUENCE ON RESULTS OF MEASUREMENT OF A TWO-TERMINAL IMMITTANCE COMPONENTS BY MEANS OF PHASE-SENSITIVE DETECTORS

A. JAWOREK

Summary

The principle of measurement of real and imaginary parts of a complex immittance of a passive two-terminal by means of phase-sensitive detectors is based on the integration, of the time-response of the two-terminal to a harmonic excitation voltage in an appropriate phase-angle intervals. The measurement errors due to limited open-loop voltage gain and limited frequency band of a measuring operational amplifier have been theoretically determined. The measurement errors have the same value for all the phase-sensitive detectors considered.

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, z. 1–2, SS. 141-165

621.382.066
536.24.083

Modelowanie generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych

ZBIGNIEW LISIK

Instytut Elektroniki, Politechnika Łódzka

Otrzymano 1990.04.08

Autoryzowano do druku 1990.08.22

CZĘŚĆ I: BILANS ENERGETYCZNY STRUKTURY PÓŁPRZEWODNIKOWEJ

W Części I pracy dokonano przeglądu stosowanych zwykle sposobów uwzględniania rozpraszania ciepła w termicznych i elektrotermicznych modelach przyrządów półprzewodnikowych. Wyodrębniono dwie grupy modeli, odpowiednio, z jednorodnymi i niejednorodnymi źródłami ciepła. Opracowano schemat przepływu energii w strukturze półprzewodnikowej, który pozwala na zweryfikowanie poprawności tych modeli. Schemat ten stanowi podstawę pełnego modelu generacji ciepła przedstawionego w Części II.

1. WSTĘP

Wzrost temperatury w półprzewodnikowej pastylce wpływa na zmianę prawie wszystkich parametrów charakteryzujących przyrząd półprzewodnikowy. Jest on podstawowym czynnikiem determinującym dopuszczalne warunki obciążenia a przekroczenie pewnej krytycznej wartości powoduje nieodwracalne uszkodzenie przyrządu. Z tych powodów bardzo ważne jest możliwie dokładne określenie zmian temperatury w różnych warunkach pracy przyrządów półprzwodnikowych.

Podstawowym parametrem deklarowanym dla tych celów przez wytwórców jest impedancja cieplna opisująca zmiany temperatury struktury półprzewodnikowej dla obciążenia przyrządu jednostkowym impulsem mocy. Istnieje szereg metod pomiaru impedancji cieplnej [1–5], korzystają one jednak głównie z krzywej stygnięcia co powoduje, że wyznaczona przy ich pomocy impedancja odpowiada pewnemu stanowi quasirównowagi cieplnej w przyrządzie i nie uwzględnia wpływu rozkładu przestrzennego generacji ciepła na rozkład temperatury[1]. Jest to jedna z przyczyn dla których podejmuje się próby wyznaczenia impedancji cieplnej na drodze teoretycznej [6–11].

[1] Należy zaznaczyć, że impedancja cieplna zmierzona w oparciu o krzywą nagrzewania ma m.in. z tego powodu inny kształt niż impedancja cieplna mierzona w oparciu o krzywą stygnięcia [64].

Impedancja cieplna pozwala na stosunkowo dokładne oszacowanie zmian temperatury w stanie ustalonym oraz podczas stosunkowo wolnozmiennych stanów przejściowych. Zastosowanie jej do stanów dynamicznych natrafia jednak na duże trudności, z uwagi na istotną rolę jaką odgrywają w tych stanach zjawiska zlokalizowane. Ponieważ bezpośredni pomiar wartości chwilowej temperatury jest również trudny do przeprowadzenia [12–16], podstawowego znaczenia przy analizie procesów cieplnych w tych stanach nabierają metody matematyczne oparte o analizę przepływu ciepła wewnątrz struktury półprzewodnikowej.

Wyznaczanie na drodze teoretycznej impedancji cieplnej, lub bezpośrednio rozkładu temperatury w przyrządzie półprzewodnikowym, wymaga rozwiązania równania przewodnictwa ciepła (1) dla odpowiednich warunków brzegowych i założonego modelu generacji ciepła

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \frac{\delta T}{\delta t} = c\rho g(x, y, z, t) \tag{1}$$

gdzie: T – temperatura, λ – przewodność cieplna, c – ciepło właściwe, ρ – gęstość właściwa, $g(x,y,z,t)$ – gęstość rozpraszania mocy.

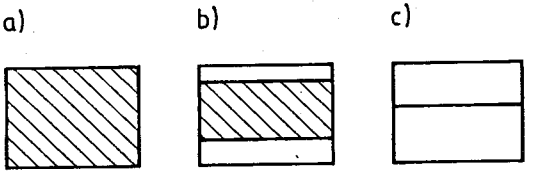
Rozwiązanie to można uzyskać na drodze analitycznej lub numerycznej [17–19]. Znalezienie rozwiązania analitycznego nie jest jednak na ogół sprawą prostą i wymaga nieraz znacznych uproszczeń w opisie zjawisk zachodzących w przyrządzie, co może mieć istotny wpływ na wiarygodność uzyskanego rozwiązania. Zastosowanie metod numerycznych nie narzuca takich ograniczeń, ale uzyskany wynik jest obarczony błędem wynikającym z ich przybliżonego charakteru.

Problemom znalezienia zadawalająco dokładnego rozwiązania równania (1) została poświęcona praca autora [20], natomiast w tej pracy zostaną omówione zagadnienia związane z modelowaniem generacji ciepła w strukturach półprzwodnikowych. Część I zawiera przegląd stosowanych dotychczas modeli generacji ciepła oraz bilans energetyczny struktury półprzewodnikowej opracowany w celu przeprowadzenia oceny dokładności prezentowanych modeli. Ocena ta, łącznie z nowym modelem generacji ciepła utworzonym w opraciu o bilans energetyczny struktury półprzewodnikowej, znajduje się w Części II [21] natomiast w Części III [67] zawarto dyskusję wkładu efektów termoelektrycznych do bilansu energetycznego przyrządu półprzewodnikowego.

2. MODELE Z JEDNORODNYM ŹRÓDŁEM CIEPŁA

W większości prac, w których analizuje się przepływ ciepła w przyrządach półprzewodnikowych, stosuje się jednorodne modele generacji ciepła przedstawione schematycznie na rys. 1. Przyjmuje się w nich, że moc rozpraszana w pastylce półprzewodnikowej jest równa iloczynowi wartości chwilowych prądu i napięcia oraz, że wydziela się równomiernie:

(a) w całym obszarze pastylki półprzewodnikowej,
(b) w pewnej warstwie *„czynnej"* wewnątrz pastylki,
(c) na pewnej płaszczyźnie wewnątrz pastylki.



Rys. 1. Jednorodne modele generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych: (a) generacja ciepła w całym obszarze pastylki półprzewodnkowej, (b) generacja ciepła w obszarze czynnym, (c) generacja ciepła na płaszczyźnie wewnątrz pastylki półprzewodnikowej

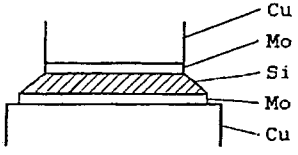
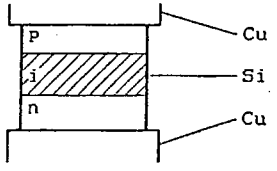
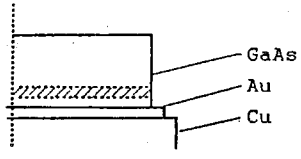
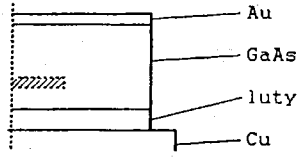
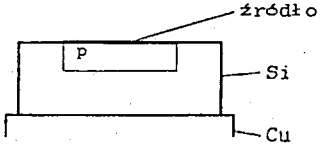
Popularność tych modeli podyktowana jest z jednej strony ich prostotą, co pozwala na stosunkowo łatwe uzyskanie analitycznych bądź numerycznych rozwiązań równania przewodnictwa ciepła, a z drugiej strony dużymi trudnościami na jakie natrafia się przy próbie bardziej dokładnego zamodelowania rozkładu wydzielania ciepła.

Usytuowanie w tych modelach płaszczyzny lub warstwy generujących ciepło stanowi odrębny problem. Ma ono istotny wpływ na przebieg obliczeń i dlatego dobiera się je indywidualnie w zależności od rodzaju przyrządu półprzewodnikowego oraz warunków pracy, dla których mają być wykonane obliczenia. W Tabeli I zebrano typowe lokalizacje tych źródeł stosowane przy analizie własności cieplnych podstawowych przyrządów półprzewodnikowych.

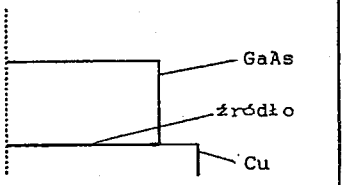
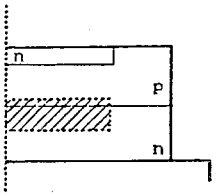
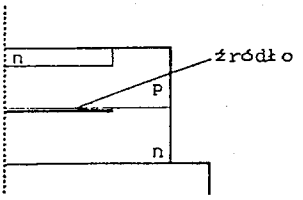
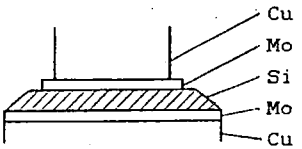
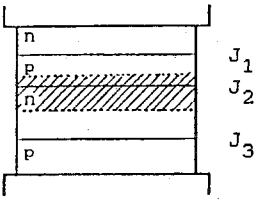
Z uwagi na przybliżony charakter modeli z jednorodnym źrodłem ciepła uzyskane przy ich pomocy rozwiązania stanowią jedynie pewne oszacowanie rzeczywistych warunków występujacych w przyrządzie półprzewodnikowym. Wpływ wybranego modelu generacji ciepła na uzyskane oszacowanie temperatury w przyrządzie bardzo dobrze ilustruje rys. 2 [22], na którym przedstawiono impedancję cieplną diody p—n obliczoną przy założeniu wydzielania ciepła w całym obszarze pastylki półprzewodnikowej (krzywa 3), w warstwie czynnej obejmującej obszar ograniczony płaszczyznami odległymi o długość dyfuzji od płaszczyzny złącza (krzywa 2) oraz na płaszczyźnie złącza (krzywa 1). Jak widać, wpływ wyboru modelu generacji ciepła na obliczoną wartość impedancji cieplnej jest bardzo duży dla małych czasów nie przekraczających kilkuset mikrosekund, maleje on następnie ze wzrostem czasu, by dla czasów rzędu kilku milisekund stać się pomijalnie małym. Oznacza to, że wybór modelu generacji ciepła ma istotne znaczenie jedynie przy analizie procesów termicznych w stanach dynamicznych przyrządu półprzewodnikowego i tylko dla tych stanów celowe jest przyjmowanie bardziej złożonych modeli. Przy analizie procesów termicznych w stanach ustalonych i wolnozmiennych podstawowym kryterium doboru modelu generacji ciepła może być prostota uzyskania rozwiązania równania przewodnictwa ciepła, co w praktyce preferuje modele z powierzchniowymi źródłami ciepła.

Tabela I

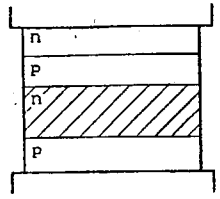
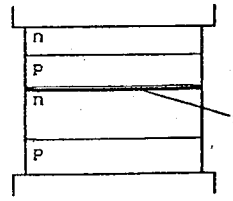
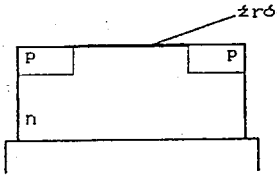
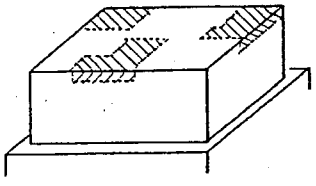
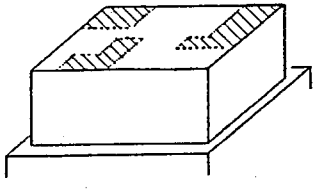
Lokalizacje jednorodnych źródeł ciepła w podstawowych przyrządach półprzewodnikowych

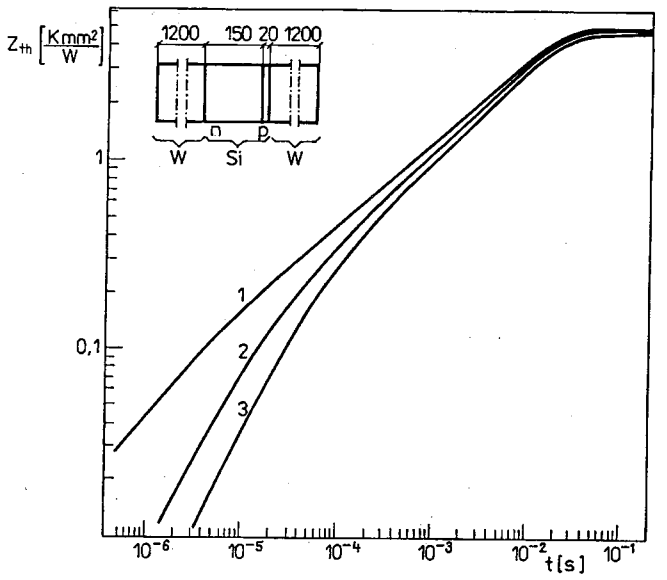
Schemat	Źródło	Uwagi
		DIODA
	[8]	Źródło objętościowe - obejmuje całą pastylkę półprzewodnikową. Model zastosowany do wyznaczenia rozkładu temperatury w diodzie mocy
	[37]	Źródło objętościowe - ciepło jest rozpraszane w obszarze aktywnym obejmującym warstwę "i" diody p-i-n
	[41] [38]	Źródło objętościowe - ciepło jest rozpraszane w obszarze aktywnym zlokalizowanym przy złączu. Model wykorzystany do analizy własności cieplnych diody krzemowej TRAPATT i diody IMPATT wykonanej z GaAs.
	[39]	Źródło objętościowe - ciepło jest rozpraszane w obszarze aktywnym obejmującym część warstwy przyległej do złącza. Model wykorzystany do analizy własności cieplnych paskowej diody laserowej
	[63]	Źródło powierzchniowe - ciepło jest rozpraszane na powierzchni płytki półprzewodnikowej. Wymiary źródła odpowiadają obszarowi zajętemu przez złącze. Model zastosowany do analizy własności cieplnych planarnej diody p-n.

c. d. Tab. I

	[64]	Źródło powierzchniowe - ciepło jest rozpraszane na powierzchni odpowiadającej kontaktowi. Model wykorzystany do analizy własności cieplnych diody Schottky'ego.
TRANZYSTOR BIPOLARNY		
	[32] [34] [36]	Źródło objętościowe - ciepło jest rozpraszane w obszarze aktywnym obejmującym warstwę ładunku przestrzennego złącza kolektor-baza pod kontaktem emiterowym.
	[33] [35] [45]	Źródło powierzchniowe - ciepło jest rozpraszane na części powierzchni złącza kolektor-baza zlokalizowanej pod obszarem emitera.
TYRYSTOR		
	[6] [43] [65]	Źródło objętościowe - ciepło jest rozpraszane równomiernie w całej pastylce półprzewodnikowej.
	[42]	Źródło objętościowe - ciepło jest rozpraszane w obszarze aktywnym obejmującym środkowe złącze J_2 tyrystor.

c. d. Tab. I

	[44]	Źródło objętościowe – ciepło jest rozpraszane w obszarze aktywnym obejmującym warstwę n–bazy tyrystora.
	[43]	Źródło powierzchniowe – ciepło jest rozpraszane na powierzchni odpowiadającej środkowemu złączu J_2.
TRANZYSTOR POLOWY		
	[40]	Źródło powierzchniowe – ciepło jest rozpraszane na powierzchni pastylki półprzewodnikowej w obszarze odpowiadającym kanałowi tranzystora.
UKŁAD SCALONY		
	[9]	Źródło objętościowe – ciepło jest rozpraszane w obszarach aktywnych zlokalizowanych przy powierzchni pastylki półprzewodnikowej i posiadających wymiary odpowiadające wymiarom pojedyńczych przyrządów półprzewodnikowych.
	[66]	Źródło powierzchniowe – ciepło jest rozpraszane na powierzchni pastylki półprzewodnikowej w obszarach odpowiadających pojedyńczym przyrządom półprzewodnikowym.



Rys. 2. Cieplna impedancja właściwa diody p-n obliczona dla różnych jednorodnych modeli generacji ciepła: 1 — ciepło wydziela się w płaszczyźnie złącza, 2 — ciepło wydziela się w obszarze przyzłączowym, 3 — ciepło wydziela się w całej pastylce półprzewodnikowej

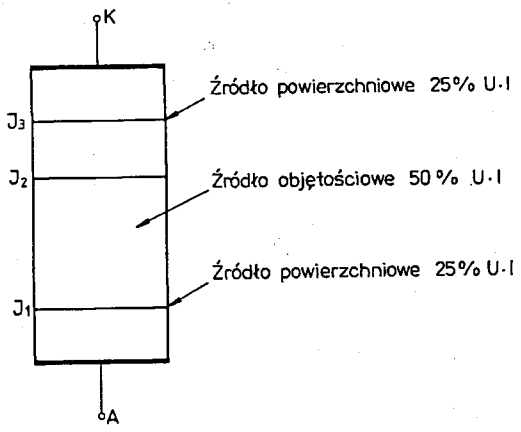
3. MODELE Z NIEJEDNORODNYM ŹRÓDŁEM CIEPŁA

Modele z jednorodnym źródłem ciepła są zbyt uproszczone aby umożliwić przeprowadzenie odpowiednio dokładnej analizy procesów cieplnych w stanach dynamicznych. Podobna sytuacja występuje także w stanach ustalonych w przyrządach, w których niejednorodny rozkład wydzielania ciepła jest wymuszony przez konstrukcję przyrządu, jak to ma np. miejsce w tranzystorach mocy.

Najprostszym sposobem polepszenia dokładności modelu generacji ciepła jest superpozycja kilku modeli z jednorodnym źródłem ciepła. Jego zaletą jest to, że przy przyjęciu, jak to się zwykle czyni, cieplnych stałych materiałowych jako wielkości stałych, można cały problem sprowadzić do superpozycji kilku prostych problemów z jednorodnym źródłem ciepła, dla których stosunkowo łatwo znaleźć odpowiednie rozwiązania analityczne. Na rys. 3 przedstawiono takie podejście zastosowane przez Somosa i Piccone [23] do wyznaczania zmian temperatury w tyrystorze.

W latach siedemdziesiątych, rozwój numerycznych technik obliczeniowych stworzył możliwości bezpośredniego rozwiązania układu równań struktury półprzewodnikowej i tym samym umożliwił uzyskanie informacji o występujących w przyrządzie półprzewodnikowym rozkładach natężenia pola elektrycznego, gęstości swobodnych nośników oraz gęstości prądów. Stało się to podstawą wprowadzenia do analizy zjawisk cieplnych w przyrządach półprzewodnikowych niejednorodnych modeli

generacji ciepła, w których objętościową gęstość wydzielania ciepła określa się przez pewną funkcję przestrzenną zależną od tych wielkości.



Rys. 3. Model generacji ciepła w tyrystorze podczas procesu wyłączania [23]

Najprostszym modelem z niejednorodnym źródłem ciepła jest przyjęty przez Gaura i Navona [24,25] oraz Stepanova i Zura [26] model, w którym objętościowa gęstość wydzielania ciepła jest określona przez iloczyn natężenia pola elektrycznego i gęstości prądu:

$$g(x, t) = E(x, t) \cdot J(x,t) \tag{2}$$

Wzór (2) jest ogólnie znany jako prawo Joule'a dla pola przepływowego prądu elektrycznego i jego słuszność dla obszarów półprzewodnika, w których nie ma nośników nadmiarowych jest oczywista. Należy jednak pamiętać, że w materiałach półprzewodnikowych występują dwa rodzaje nośników a istnienie przerwy energetycznej nie pozwala w ogólnym przypadku na łączne traktowanie prądu elektronowego i dziurowego. Są to formalnie dwa odrębne pola przepływowe nakładające się na siebie przestrzennie a wymiana nośników pomiędzy nimi jest związana z pochłonięciem lub wydzieleniem energii równej szerokości przerwy energetycznej. Wzór (2) nie uwzględnia tego dwoistego charakteru pola przepływowego w materiale półprzewodnikowym i z tego względu nie może być stosowany w obszarach, w których występuje rekombinacja lub generacja nośników.

W literaturze można spotkać jeszcze dwie inne, bardziej złożone postacie funkcji gęstości wydzielania ciepła, w których te procesy są uwzględnione. Poniżej przedstawiono drogi, które do nich doprowadziły:

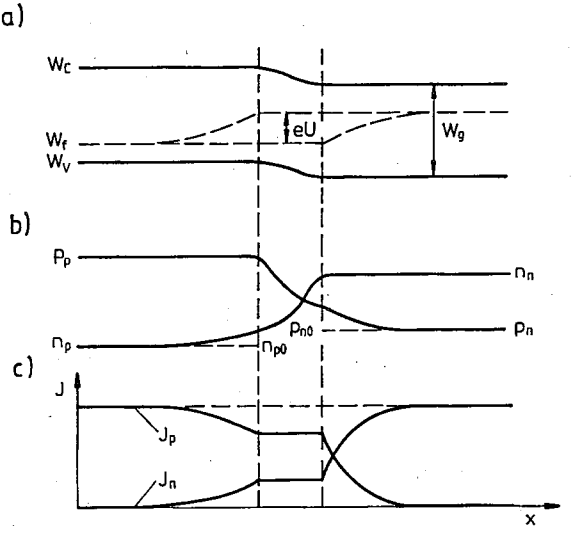
Model Shockley'a—Saha

Modelowi temu odpowiada funkcja gęstości wydzielania ciepła (3).

$$g(x, t) = R(W_{Fe} - W_{Fh}) + \frac{1}{q}\left(J_h \frac{dW_{Fh}}{dx} + J_e \frac{dW_{Fe}}{dx}\right), \tag{3}$$

gdzie: R — szybkość rekombinacji, J_h i J_e — odpowiednio, gęstość prądu dziurowego i elektronowego, W_{Fe} i W_{Fh} — odpowiednio, quasi-poziom Fermiego dla elektronów i dziur.

Wyrażenie to zostało po raz pierwszy podane w 1970 r. przez Saha [27], który oparł się na wcześniejszych rozważaniach Shockley'a, [28] dotyczących rezystancji idealnej diody p-n. Analogiczne wyrażenie otrzymali w 1979 r. Chryssafis i Love [29] na drodze formalnych przekształceń różniczkowej postaci równania Greena.



Rys. 4. Rozważana dioda p-n spolaryzowana w kierunku przewodzenia: (a) model pasmowy, (b) rozkład nośników, (c) rozkład prądów

Przedstawione w [27] i [29] sposoby otrzymania równania (3) dość istotnie różnią się od siebie, jednak w obu przypadkach rozważania dotyczyły przedstawionej na rys. 4 idealnej diody, w której:
— moc rozpraszana w strukturze półprzewodnikowej jest równa iloczynowi gęstości płynącego prądu i przyłożonego napięcia,
— prąd przy kontaktach jest prądem czysto większościowym.
Dla tych założeń można za Sahem przeprowadzić następujacy ciąg formalnych przekształceń:

$$P = J \cdot U = J\frac{1}{q}\Big(W_F(w) - W_F(0)\Big) =$$

$$= \frac{1}{q}\Big[(J_e(w) + J_h(w))\, W_F(w) - (J_e(0) + (J_h(0))\, W_F(0)\Big] =$$

$$= \frac{1}{q}\Big[(J_e(w)\, W_{Fe}(w) + J_h(w)\, W_{Fh}(w)) - (J_e(0)\, W_{Fe}(0) + J_h(0)\, W_{Fh}(0))\Big] =$$

$$= \frac{1}{q}\Big(J_e(x)\, W_{Fe}(x) + J_h(x)\, W_{Fh}(x)\Big)_0^w = = \frac{1}{q}\int_0^w \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(J_e\, W_{Fe} + J_h\, W_{Fh}\Big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{q}\int_0^w \left[\left(W_{Fe}\frac{dJ_e}{dx} + W_{Fh}\frac{dJ_h}{dx}\right) + \left(J_e\frac{dW_{Fe}}{dx} + J_h\frac{dW_{Fh}}{dx}\right)\right] dx =$$

$$= \int_0^w \left[R\left(W_{Fe} - W_{Fh}\right) + \frac{1}{q}\left(J_e\frac{dW_{Fe}}{dx} + J_h\frac{dW_{Fh}}{dx}\right)\right] dx = \int_0^w g(x, t)\, dx.$$

Przyrównując do siebie wyrażenia podcałkowe w ostatniej równości otrzymamy funkcję gęstości wydzielania ciepła analogiczną z funkcją (3).

Model Navona-Adlera

Model ten przedstawili w 1978 roku niezależnie od siebie Adler [30] i Navon [31]. Punktem wyjścia ich rozważań były wyrażenia (4) opisujące strumienie energii związane, odpowiednio, z przepływem elektronów i dziur.

$$S_e = \frac{1}{q} J_e W_c \tag{4a}$$

$$S_h = \frac{1}{q} J_h W_v. \tag{4a}$$

Stosując do tych wyrażeń zasadę zachowania energii można otrzymać równanie określające gęstość rozpraszania mocy Q w strukturze półprzewodnikowej:

$$Q(x, y, z, t) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{q}J_e W_c + \frac{1}{q}J_h W_v\right). \tag{5}$$

Po sprowadzeniu równania (5) do postaci jednowymiarowej i wykonaniu różniczkowania otrzymuje się:

$$g(x, t) = \frac{1}{q}\frac{dJ_e}{dx} W_c + \frac{1}{q}\frac{dJ_h}{dx} W_v + \frac{1}{q}\left(J_e\frac{dW_c}{dx} + J_h\frac{dW_v}{dx}\right). \tag{6}$$

Następnie wprowadza się do wyrażenia (6) równania ciągłości i po odpowiednich przekształceniach otrzymuje się:

$$g(x, t) = R(W_c - W_v) + \frac{1}{q}\left(J_e\frac{dW_c}{dx} + J_h\frac{dW_v}{dx}\right) + \left(W_c\frac{dn}{dt} - W_v\frac{dp}{dt}\right). \tag{7}$$

Równanie (7) stanowi ogólną postać funkcji gęstości wydzielania ciepła w modelu Navona-Adlera. Wzór ten zwykle upraszcza się przyjmując pochodne po czasie równe zero, co daje:

$$g(x, t) = R(W_c - W_v) + \frac{1}{q}\left(J_e \frac{dW_c}{dx} + J_h \frac{dW_v}{dx}\right). \tag{8}$$

Jeżeli dodatkowo przyjmie się, że efekt zwężenia szerokości przerwy energetycznej związany z poziomem domieszkowania jest do pominięcia, równanie (8) ulegnie dalszemu uproszczeniu do postaci:

$$g(x, t) = R(W_c - W_v) + JE. \tag{9}$$

Wyrażenie (9) stanowi połączenie prawa Joule'a (2) ze składnikiem opisującym rozpraszanie energii na drodze rekombinacji.

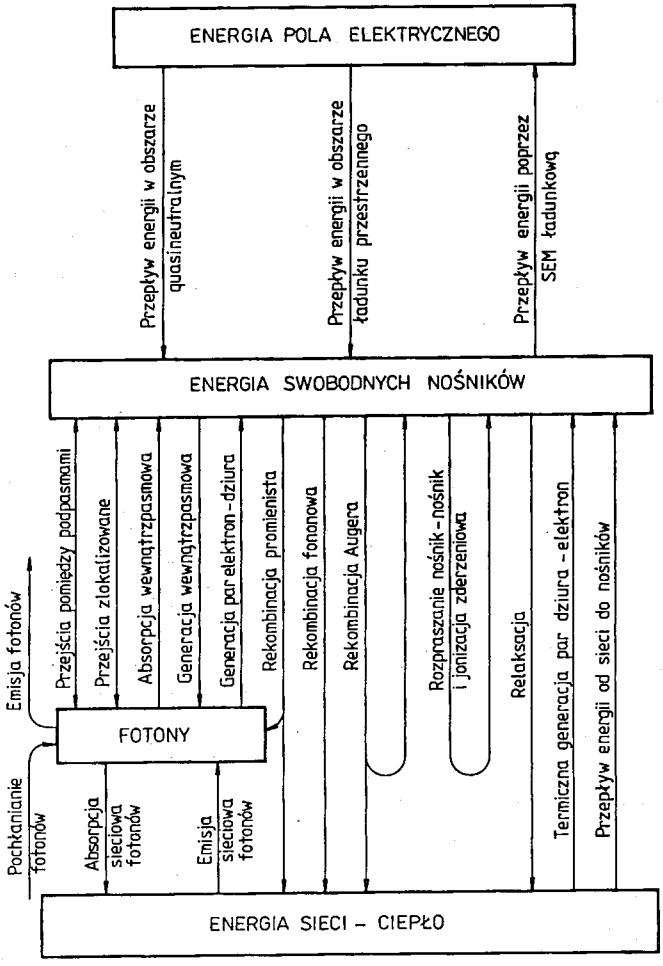
4. BILANS ENERGETYCZNY STRUKTURY PÓŁPRZEWODNIKOWEJ

W poprzednim rozdziale przedstawiono dwa podejścia do problemu dokładnego modelowania rozpraszania ciepła w strukturze półprzewodnikowej prowadzące do dwóch postaci, wzory (3) i (8), funkcji objętościowej gęstości rozpraszania ciepła. Oba te wzory różnią się od siebie dość istotnie i należy oczekiwać, że zastosowane do rozwiązania tego samego problemu dadzą istotnie różne wyniki. Aby móc oceniać na ile odzwierciedlają one rzeczywiste procesy rozpraszania ciepła, zrobiono bilans procesów przekazywania energii w strukturze półprzewodnikowej. Otrzymany w jego wyniku schemat przepływu energii w strukturze jest przedstawiony na rys. 5.

Na schemacie wyodrębniono cztery podstawowe formy w jakich energia może występować w strukturze półprzewodnikowej[2]. Są to:
- energia pola elektrycznego
- energia swobodnych nośników
- energia fotonów
- energia fononów

Liniami zorientowanymi zaznaczono na schemacie kierunki przepływu energii pomiędzy tymi czterema *„magazynami energii"* we wszystkich podstawowych procesach występujących w przyrządach półprzewodnikowych. Na uwagę zasługuje fakt, że zamiana na ciepło energii elektrycznej dostarczanej do przyrządu półprzwodnikowego nie odbywa się bezpośrednio ale ma charakter procesu co najmniej dwuetapowego. Pierwszy etap odpowiada wymianie energii pomiędzy polem elektrycznym i swobodnymi nośnikami, natomiast w drugim etapie następuje wymiana energii pomiędzy swobodnymi nośnikami i siecią czyli fononami. Etapy te są od siebie niezależne i w każdym z nich energia może przepływać w obu kierunkach. Z tego względu należy być bardzo ostrożnym przy określaniu funkcji gęstości wydzielania ciepła, tak aby z jednej strony uwzględnić wszystkie mechanizmy generacji ciepła ale z drugiej strony aby energia związana z żadnym z tych mechanizmów nie została w funkcji uwzględniona dwukrotnie.

[2] Energia może jeszcze w sporadycznych wypadkach występować pod postacią pola magnetycznego lub pola siłowego. Formy te zostały w schemacie pominięte z uwagi na rzadkość ich występowania oraz marginalny udział w procesach cieplnych.



Rys. 5. Schemat przepływu energii w strukturze półprzewodnikowej

Problemowi wyznaczenia funkcji gęstości wydzialania ciepła w oparciu o przedstawiony na rys. 5 schemat przepływu energii jest poświęcona Część II [21], natomiast w dalszej części tego artykułu zostaną omówione wszystkie procesy uwzględnione przy tworzeniu tego schematu. Są to procesy wymiany energii pomiędzy polem elektrycznym i swobodnymi nośnikami oraz procesy prowadzące do zmian energii związanej z fotonami i fononami.

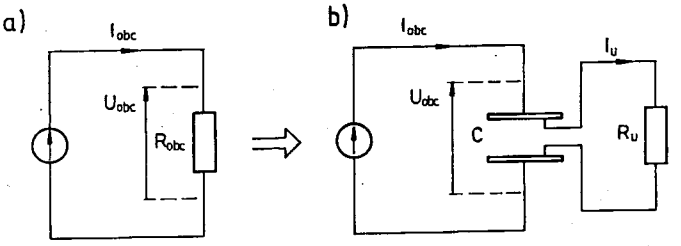
4.1. WYMIANA ENERGII POMIĘDZY POLEM ELEKTRYCZNYM I SWOBODNYMI NOŚNIKAMI

Ogólnie przyjmuje się, że energia elektryczna może być zmagazynowana w kondensatorze, na którym występuje napięcie U, w indukcyjności, przez którą płynie prąd I lub też może być ona rozpraszana w wyniku przepływu prądu przez odbiornik.

W pierwszym przypadku mamy do czynienia z czystym przypadkiem magazynowania energii w polu elektrycznym a wielkość tej energii jest określona przez znany wzór (10):

$$W = \frac{1}{2} U^2 C. \tag{10}$$

W drugim przypadku energia jest magazynowana w polu magnetycznym bez udziału pola elektrycznego, natomiast w trzecim pole elektryczne występuje, ale trudno określić energię z nim związaną.



Rys. 6. Obciążenie rezystancyjne (a) i jego analog pojemnościowy (b)

Z makroskopowego punktu widzenia, odbiornik można formalnie potraktować jako kondensator o dużej upływności, którego elektrody pokrywają się z elektrodami doprowadzeń. Na rys. 6 przedstawiono taki pojemnościowy analog obciążenia dla przypadku obciążenia rezystancyjnego. Napięcie U_{obc} występuje na nim na okładkach kondensatora C, który jest jednocześnie ładowany z zewnętrznego źródła U_z i rozładowywany prądem I_u płynącym poprzez oporność upływu R_u. Przyjęcie tego pojemnościowego analogu obciążenia pozwala na prostą interpretację energii pola elektrycznego w obciążeniu. Zgodnie z nią, utworzony przez elektrody doprowadzeń kondensator C wytwarza pewne pole elektryczne o kształcie zależnym od właściwości obciążenia. W każdym punkcie tego pola jest zmagazynowana energia określona przez funkcję gęstości energii:

$$w(x, y, z) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \tag{11}$$

a całkowita energia związana z tym polem jest równa całce z funkcji $w(x,y,z)$ rozciągniętej na całą przestrzeń.

W analogu obciążenia przedstawionym na rys. 6, zmiany energii zmagazynowanej w polu elektrycznym mogą być wywołane przepływem nośników pomiędzy elektrodami kondensatora C. Przepływ elektronu od kontaktu ujemnego do dodatniego zmniejsza energię zmagazynowaną w polu (praca wykonana kosztem energii pola), natomiast przejście elektronu od kontaktu dodatniego do ujemnego zwiększa ją (praca wykonana kosztem sił nieelektrycznych). Interpretację tą można uogólnić na przypadek dowolnego obszaru z polem elektrycznym, przez który przepływają nośniki ładunku. Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, w obszarze tym jest zmagazynowana pewna energia pola elektrycznego określona przez funkcję gęstości energii (11). Na skutek przepływu nośników energia ta może ulegać zmianom

wynikającym z wymiany energii pomiędzy nośnikami a polem, co będzie miało swoje odbicie w odpowiednich zmianach przestrzennego rozkładu funkcji gęstości energii (11).

W obciążeniu rezystancyjnym pole elektryczne jest efektem różnicy potencjałów na zaciskach odbiornika a stałość energii zmagazynowanej w polu, i co za tym idzie stałość tej różnicy potencjałów, jest utrzymywana poprzez odpowiedni dopływ energii z zewnętrznego źródła energii jakim jest źródło napięciowe U_z. Szczególnym przypadkiem takiego obciążenia jest jednorodna struktura półprzewodnika o stałej koncentracji domieszek. W strukturze takiej panują warunki quasineutralności a swobodne nośniki ładunku (elektrony i dziury) ulegając przyspieszaniu w polu elektrycznym pobierają od tego pola energię by następnie przekazać ją dalej w procesach relaksacji (por. rozdz. 4.3). Tej formie przepływu energii pomiędzy polem elektrycznym a swobodnymi nośnikami odpowiada na rys. 5 linia **Przepływu energii w obszarze quasineutralnym.**

Wprowadzenie w miejsce obciążenia rezystancyjnego struktury półprzewodnikowej o niejednorodnym profilu domieszkowania zmienia w sposób istotny przedstawiony wyżej obraz. W strukturze takiej powstaje bez udziału czynników zewnętrznych tzw. *„wbudowane pole elektryczne"* będące wynikiem przemieszczenia się swobodnych nośników w stosunku do zjonizowanych atomów domieszek. Z polem tym jest jak poprzednio związana pewna energia określona przez funkcję gęstości (11), lecz w tym przypadku energia ta nie pochodzi z zewnętrznego źródła ale jest uzyskana od swobodnych nośników. Uogólniając można stwierdzić, że w półprzewodniku o niejednorodnym profilu jest możliwe przekazywanie energii przez swobodne nośniki polu elektrycznemu. Proces ten zachodzi wtedy gdy w wyniku przepływu strumienia nośników przez obszar z polem elektrycznym pojawia się prąd elektryczny o kierunku przeciwnym do kierunku wektora tego pola. Proces ten jest zjawiskiem odwracalnym, tzn. zmianie kierunku przepływu strumienia nośników towarzyszy zmiana charakteru zjawiska i energia jest wtedy przekazywana nośnikom przez pole elektryczne analogicznie jak to ma miejsce w przypadku obszaru quasineutralnego. Na rys. 5 ten proces wymiany energii jest reprezentowany przez dwie linie. Linia **Przepływ energii w obszarze ładunku przestrzennego** odpowiada przekazywaniu energii przez pole swobodnym nośnikom, natomiast linia **Przepływ energii poprzez SEM ładunkowe** odpowiada przekazywaniu energii nośników polu elektrycznemu.

4.2 PROCESY PROWADZĄCE DO ZMIAN ENERGII FOTONÓW

W każdym krysztale, także w krysztale półprzewodnika tworzącym przyrząd półprzewodnikowy, występuje gaz fotonowy utworzony z fotonów, które nieustannie wnikają i opuszczają kryształ oraz uczestniczą w procesach oddziaływań z kryształem. Mechanizmy tych oddziaływań są rozmaite a ich dokładnemu opisowi poświęcona jest obszerna literatura [46—50], zawsze jednak ich końcowym efektem jest generacja lub absorpcja fotonu. Z gazem fotonowym jest związana pewna energia

określona przez sumę energii wszystkich fotonów znajdujących się w obszarze kryształu. Energia ta może ulegać zmianom a procesy prowadzące do tych zmian można generalnie podzielić na procesy wymiany energii pomiędzy: gazem fotonowym a otoczeniem, gazem fotonowym a siecią oraz gazem fotonowym a swobodnymi nośnikami.

4.2.1 WYMIANA ENERGII POMIĘDZY GAZEM FOTONOWYM A OTOCZENIEM

Wymiana energii pomiędzy gazem fotonowym a otoczeniem może przybierać dwie, jakościowo różne formy w zależności od optycznych własności kryształu. Jeżeli kryształ jest przezroczysty dla fotonów o danej energii (emisyjność $\varepsilon=0$), to przenikają one bez przeszkód przez obszar kryształu a ich energia w okresie ich pobytu w tym obszarze stanowi część energii gazu fotonowego. Oznacza to, że przy wejściu fotonu w obszar kryształu gaz fotonowy uzyskuje od otoczenia porcję energii, a następnie oddaje ją z powrotem gdy foton opuszcza ten obszar. Gdy kryształ nie jest przezroczysty (emisyjność $\varepsilon>0$), to obok strumienia fotonów przechodzących przez obszar kryształu pojawią się fotony wnikające i opuszczające obszar kryształu, które uczestniczą w procesach oddziaływań z kryształem. Jeżeli są to oddziaływania prowadzące do absorpcji fotonu, strumień fotonów wnikający w obszar kryształu jest mniejszy od strumienia opuszczającego ten obszar, natomiast jeżeli ich efektem jest generacja fotonu, strumień opuszczający obszar jest większy od strumienia wnikającego. Na rys. 5 oba te strumienie wymiany energii pomiędzy otoczeniem a gazem fonowym są reprezentowane, odpowiednio, przez linie **Pochłanianie fotonów** i **Emisja fotonów.**

4.2.2. WYMIANA ENERGII POMIĘDZY GAZEM FOTONOWYM A SIECIĄ

Wymiana energii pomiędzy gazem fotonowym a siecią odbywa się na drodze generacji lub absorpcji fotonów w wyniku oddziaływań z fononami optycznymi. Mogą to być oddziaływania jednofononowe, wielofononowe oraz jednofonowe wywołane defektami [46]. Oddziaływania jednofononowe występują tylko w kryształach jonowych, natomiast kryształy homeopolarne, do których zaliczają się m.in. krzem i german, są w tym obszarze przezroczyste. W kryształach tych obserwuje się jedynie oddziaływania wielofononowe [51,52] oraz odziaływania jednofononowe wywołane defektami [53,54].

W stanie równowagi termodynamicznej nie ma przepływu energii pomiędzy gazem fotonowym a siecią a co za tym idzie, ilości generowanych i absorbowanych fotonów są sobie równe. Z uwagi na małe wartości współczynnika emisji oddziaływania te odgrywają niewielką rolę w procesach wymiany energii z otoczeniem, ich widma absorpcyjne stanowią natomiast jedno z podstawowych narzędzi badań własności kryształów. Na rys. 5 całość procesów wymiany energii pomiędzy gazem fotonowym a siecią jest reprezentowana przez linie **Absorpcja sieciowa fotonów** i **Emisja sieciowa fotonów.**

4.2.3. WYMIANA ENERGII POMIĘDZY GAZEM FOTONOWYM A SWOBODNYMI NOŚNIKAMI

Wymiana energii pomiędzy gazem fotonowym a swobodnymi nośnikami odbywa się na drodze generacji lub absorpcji fotonów w wyniku:
– przejść elektronów pomiędzy podpasmami danego pasma.
– przejść z udziałem stanów zlokalizowania (np. domieszkowych),
– przejść elektronów wewnątrz jednego pasma,
– przejść elektronów pomiędzy pasmem przewodnictwa a pasmem walencyjnym,
W stanie równowagi przejścia te bilansują się a co za tym idzie nie ma przepływu energii pomiędzy gazem fotonowym a swobodnymi nośnikami. Pojawia się on dopiero z chwilą wzrostu energii gazu fotonowego, np. w wyniku skierowania na kryształ strumienia fotonów, lub wzrostu energii swobodnych nośników. Nośniki mogą jednak oddawać nadmiar energii zarówno w procesach oddziaływań z gazem fotonowym jak i w konkurencyjnych do nich procesach relaksacji z siecią. Z tego powodu przejścia o małym, w porównanniu z relaksacją sieciową, prawdopodobieństwie wystąpienia uczestniczą praktycznie jedynie w procesach absorpcji fotonów i są obserwowane jedynie w widmie absorpcyjnym kryształu. Uwaga ta dotyczy w szczególności dwóch pierwszych typów przejść.

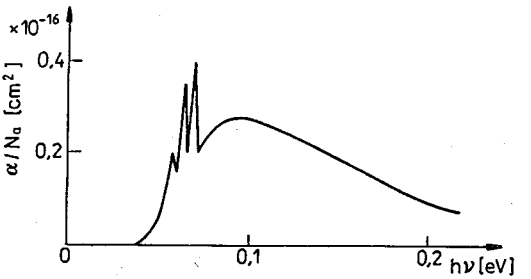
4.2.3.1. PRZEJŚCIA POMIĘDZY PODPASMAMI

Przejścia pomiędzy podpasmami obejmują tzw. przejścia międzywalencyjne oraz przejścia pomiędzy poziomami Landaua powstałymi w wyniku rozczepienia gałęzi pasma w obecności zewnętrznego pola magnetycznego. Przejścia międzywalencyjne występują jedynie w dostatecznie wysoko domieszkowanych półprzewodnikach typu p, w których w pobliżu maksimum pasma walencyjnego znajdują się conajmniej dwie gałęzie, jak to ma np. miejsce w krzemie i germanie [55,56]. Przejścia tego rodzaju były obserwowane doświadczalnie w widmie absorpcyjnym germanu [56], jednak ich udział w całości procesów wymiany energii w krysztale jest pomijalnie mały. Podobnie ma się sytuacja z przejściami pomiędzy poziomami Landaua wewnątrz jednego pasma, chociaż ich widmo absorpcyjne otrzymywane w badaniach rezonansu cyklotronowego stanowi jedno z podstawowych narzędzi badań materiałów półprzewodnikowych. Na rys. 5 oba te mechanizmy wymiany energii są reprezentowane przez linię **Przejścia pomiędzy podpasmami.**

4.2.3.2. PRZEJŚCIA Z UDZIAŁEM STANÓW ZLOKALIZOWANYCH

Przejścia z udziałem stanów zlokalizowanych dotyczą głównie procesów fotojonizacji domieszek, które nie uległy wcześniej jonizacji termicznej [57–59]. Z uwagi na stosunkowo niewielką odległość poziomów akceptorowych i donorowych od odpowiednich pasm, są one głównie obserwowane w niskich temperaturach, w których poziomy te nie są jeszcze zjonizowane. Na rys. 7 przedstawiono widmo absorpcji krzemu domieszkowego aluminium na którym obok absorpcji na swobodnych

nośnikach widoczne są piki związane z fotojonizacją. Na rys. 5 przejściu temu odpowiada linia **Przejścia zlokalizowane.**

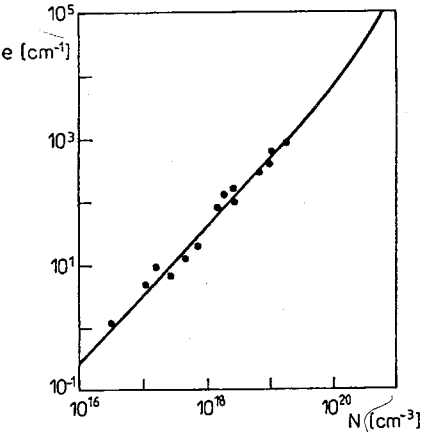


Rys. 7. Widmo absorpcji krzemu domieszkowanego glinem z widocznymi pikami absorpcji domieszkowej [57]

4.2.3.3. PRZEJŚCIA WEWNĄTRZ PASMA

Przejścia wewnątrz pasm obejmują wszystkie zmiany energii elektronów wewnątrz pasma przewodnictwa i pasma walencyjnego związane z generacją lub absorpcją fotonu. W oddziaływaniach tych elektrony przechodzą pomiędzy dwoma stanami energetycznymi danego pasma, przy czym przejściom tym towarzyszy z reguły generacja lub absorpcja fononu, konieczna dla spełnienia zasady zachowania quasi-pędu.

Udział fotonów o różnej długości fali nie jest w przejściach wewnątrzpasmowych równoprawny. Sytuację tą ilustruje rys. 7, na którym przedstawiono widmo absorpcji krzemu w zakresie odpowiadającym m.in. tym przejściom. Wartość współczynnika absorpcji dla danej długości fali również nie jest wielkością stałą, ale zależy od gęstości nośników mogących uczestniczyć w przejściach wewnątrzpasmowych (rys. 8) oraz od temperatury.



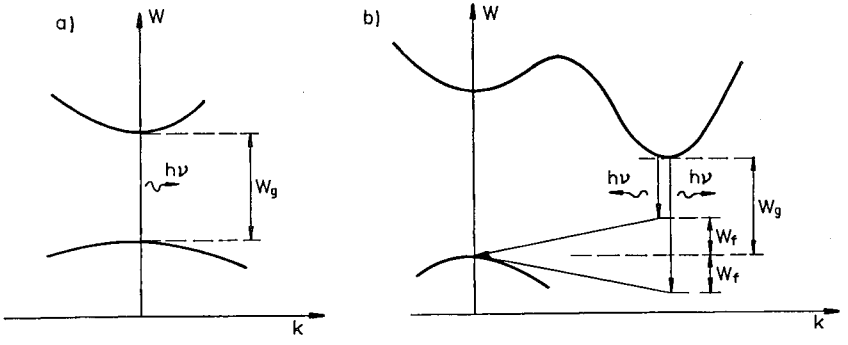
Rys. 8. Zależność współczynnika absorpcji od gęstości swobodnych nośników w krzemie dla długości fali $\lambda = 5\ \mu m$ [60]

W stanie równowagi termodynamicznej pomiędzy gazem fotonowym a swobodnymi nośnikami ilości aktów generacji i absorpcji fotonów wewnątrz kryształu są sobie statystycznie równe. Sytuacja ta wygląda nieco odmiennie w obszarze przylegającym do brzegu kryształu z uwagi na skończone wartości współczynnika absorpcji fotonów uczestniczących w przejściach międzypasmowych. Część fotonów generowanych w tym obszarze jest w stanie opuścić kryształ w postaci promieniowania cieplnego a jednocześnie fotony wnikające do kryształu ulegają w tym obszarze absorpcji. Tak więc, jeżeli kryształ ma temperaturę wyższą od temperatury otoczenia mamy do czynienia z oddawaniem energii do otoczenia na drodze emisji promieniowania cieplnego z obszaru przypowierzchniowego, natomiast, jeżeli temperatura kryształu jest niższa od temperatury otoczenia lub na kryształ jest skierowany strumień fotonów o odpowiedniej długości fali, z uzyskiwaniem energii z zewnątrz w wyniku absorpcji promieniowania w warstwie przypowierzchniowej.

Przejścia wewnątrzpasmowe uczestniczą w niewielkim stopniu w procesach przepływu energii w strukturach półprzewodnikowych. Na rys. 5 są one zaznaczone liniami **Generacja wewnątrzpasmowa** i **Absorpcja wewnątrzpasmowa.**

4.2.3.4. PRZEJŚCIA POMIĘDZY PASMAMI

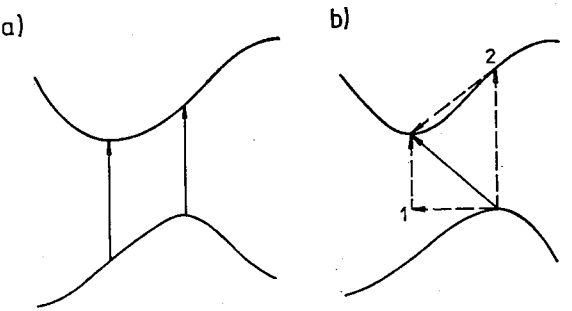
Przejścia pomiędzy pasmami obejmują wszystkie procesy rekombinacji promienistej oraz generacji par dziura–elektron wywołanej absorpcją fotonu. Z uwagi na dużą wartość przerwy energetycznej pomiędzy pasmem przewodnictwa a pasmem walencyjnym w procesach tych mogą uczestniczyć tylko fotony o dostatecznie dużej energii (np. w krzemie $h\nu > 1.12$ eV), co powoduje, że widma emisyjne i absorpcyjne przejść międzypasmowych i wewnątrzpasmowych są wyraźnie względem siebie przesunięte.



Rys. 9. Międzypasmowe przejścia rekombinacyjne: (a) w półprzewodniku z prostą przerwą energetyczną oraz (b) w półprzewodniku ze skośną przerwą energetyczną z udziałem fononu

W zależności od struktury pasmowej półprzewodnika wyodrębniono dwa typy przejść międzypasmowych przedstawionych schematycznie na rys. 9. W półprzewodnikach z prostą przerwą energetyczną, takich jak np. GaAs czy InSb występują proste

przejścia międzypasmowe (rys. 9a), w których elektron przechodzi z poziomu odpowiadającemu wierzchołkowi pasma walencyjnego do poziomu odpowiadającemu dnu pasma przewodnictwa lub odwrotnie bez zmiany quasi-pędu. Przejściu temu towarzyszy generacja lub absorpcja fotonu o energii $h\nu \geqq W_g$. W półprzewodnikach ze skośną przerwą energetyczną, takich jak Si i Ge, mamy do czynienia z dwoma rodzajami przejść. W procesach rekombinacji są to, przedstawione na rys. 9b, przejścia skośne, w których elektron przechodzi z dna pasma przewodnictwa do wierzchołka pasma walencyjnego z jednoczesną generacją lub absorpcją fononu, natomiast w procesach generacji par dziura—elektron może to być przejście proste pokazane na rys. 10a lub



Rys. 10. Przejścia proste (a) i skośne (b) przy absorpcji światła

przejście skośne pokazane na rys. 10b. W przypadku przejścia skośnego porcja energii wymieniana pomiędzy gazem fotonowym a swobodnymi nośnikami jest pomniejszana lub powiększana o energię fotonu uczestniczącego w tym przejściu. Energia ta jest jednak na tyle mała w porównaniu z energią emitowanego (lub generowanego) fotonu, że może być w pierwszym przybliżeniu pominięta. Na rys. 5 przejścia międzypasmowe zaznaczono liniami: **Generacja par dziura—elektron** oraz **Rekombinacja promienista.**

4.3. WYMIANA ENERGII POMIĘDZY SWOBODNYMI NOŚNIKAMI A SIECIĄ

Przepływ energii pomiędzy swobodnymi nośnikami a siecią odbywa się w wyniku zderzeń nośników z niedoskonałościami sieci krystalicznej czyli defektami i drganiami sieci tworzącymi gaz fononowy. W warunkach równowagi termodynamicznej efekty tych zderzeń bilansują elektrony poruszające się swobodnie wewnątrz kryształu od zderzenia do zderzenia, ich ruch jest całkowicie chaotyczny a rozkład energii zarówno elektronów jak i dziur jest opisany funkcją Fermiego—Diraca dla temperatury gazu elektronowego T_e równej temperaturze sieci. Wielkościami charakteryzującymi ten ruch są średnia droga swobodna l, czas relaksacji τ, równy średniemu czasowi swobodnego przebiegu pomiędzy dwoma kolejnymi zderzeniami i średnia prędkość ruchu cieplnego v_{th}.

Przepływ energii pomiędzy siecią a swobodnymi nośnikami pojawia się w momencie zakłócenia przez czynniki zewnętrzne stanu równowagi termodynamicznej tzn.

w momencie, gdy rozkład energii swobodnych nośników przestaje być określony przez funkcję Fermiego—Diraca dla temperatury sieci. Czynnikiem takim może być zmiana temperatury sieci lub, co się częściej zdarza, zmiana koncentracji nośników lub ich energii wywołana przez strumień fotonów, zewnętrzne pole elektryczne bądź wstrzyknięcie dodatkowych nośników.

4.3.1. PRZEJŚCIA REKOMBINACYJNE

Przejścia rekombinacyjne występują w sytuacji gdy gęstość swobodnych nośników jest większa od gęstości równowagowej występującej w stanie równowagi termodynamicznej. Prowadzą one do zaniku par dziura—elektron w wyniku przejścia elektronu z poziomu energetycznego w pasmie przewodnictwa do poziomu energetycznego w paśmie walencyjnym. Z uwagi na formę jaką przyjmuje energia oddawana przez elektron można wyodrębnić trzy rodzaje procesów rekombinacyjnych:

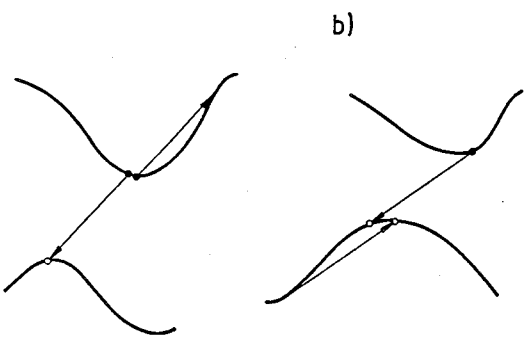
— rekombinacja promienista, w której energia w całości lub w większej części jest przekazywana fotonom (są to przejścia międzypasmowe omówione w p.4.2.3.4),

— rekombinacja fononowa, w której energia jest przekazywana fononom, czyli sieci,

— rekombinacja Augera, w której energia jest przekazywana trzeciemu nośnikowi ładunku.

W procesach rekombinacji fononowej mamy do czynienia z bezpośrednim przepływem energii pomiędzy swobodnymi nośnikami a siecią, którego celem jest przywrócenie równowagi termodynamicznej. W sytuacji nadwyżki swobodnych nośników ponad gęstość równowagową, energia nośników jest przekazywana sieci w procesie rekombinacji czemu odpowiada na rys. 5 linia **Rekombinacja fononowa**. W sytuacji odwrotnej, niedoboru swobodnych nośników w stosunku do ich aktualnej gęstości równowagowej, wystąpi odwrotny proces termicznej generacji nowych par dziura—elektron kosztem energii sieci czemu odpowiada na rys. 5 linia **Termiczna generacji par dziura—elektron.**

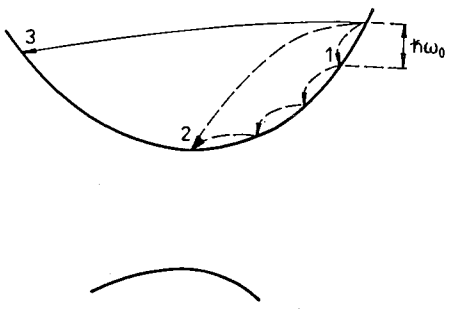
W procesach rekombinacji zderzeniowej Augera cała energia jest przekazywana trzeciemu nośnikowi, jak to ilustruje rys. 11. Nośnik ten przechodzi na poziom energetyczny znacznie wyższy od najwyższego normalnie obsadzonego poziomu i jest określany mianem gorącego nośnika. Nie jest to sytuacja trwała i gorący nośnik wraca w procesie relaksacji (por. rozdz. 4.3.2) na poziom energetyczny odpowiadający stanowi równowagi cieplnej gazu elektronowego. W procesie tym oddaje on nadmiar energii w wyniku zderzeń z gazem elektronowym oraz generacji fononów optycznych, jak to przedstawia rys. 11. Tak więc, mimo że w momencie zaniku pary dziura—elektron na drodze rekombinacji zderzeniowej cała energia jest przejmowana przez gorący nośnik, ostatecznie i tak trafia ona do sieci w wyniku relaksacji tego nośnika. Z tego względu ten przepływ energii zaznaczono na rys. 5 linią **Rekombinacji Augera** z gałęzią zwrotną reprezentującą energię oddawaną nośnikom w zderzeniach z gazem elektronowym.



Rys. 11. Rekombinacja Augera z prostym przejściem pasmo-pasmo: (a) zderzenie elektron-elektron-dziura, (b) zderzenie dziura-dziura-elektron

4.3.2. PROCESY RELAKSACYJNE

W procesach relaksacyjnych następuje wyrównanie się temperatur sieci T_s i gazu elektronowego T_e bez zmiany koncentracji swobodnych nośników, a jedynie w wyniku zderzeń swobodnych nośników z dgraniami sieci, domieszkami i innymi defektami sieci. Efektem każdego takiego zderzenia może być przepływ energii pomiędzy swobodnymi nośnikami a siecią. Jeżeli $T_s = T_e$, tzn. występują warunki równowagi termodynamicznej, przepływy te statystycznie kompensują się, natomiast jeżeli $T_s < T_e$ przeważa przepływ energii od swobodnych nośników do sieci i mamy do czynienia z relaksacją nośników. Jest oczywiście możliwy również przypadek odwrotny, gdy $T_s > T_e$, i wtedy będzie przeważał przepływ energii od sieci do swobodnych nośników. Omówionym wyżej procesom wymiany energii pomiędzy siecią a swobodnymi nośnikami odpowiadają na rys. 5 linie **Relaksacja** oraz **Przepływ energii od sieci do nośników.**



Rys. 12. Schematyczne przedstawienie procesów relaksacji: 1 i 3 emisja fononu optycznego z różnymi wektorami falowymi, 2-zderzenia gorącego nośnika z gazem elektronowym [61]

W procesach relaksacji swobodne nośniki mogą oddawać swoją energię nie tylko w zderzeniach z siecią ale także w wyniku zderzeń z innymi nośnikami jak to pokazano na rys. 12. Energia ta i tak zostanie ostatecznie przekazana sieci, o ile będzie tego wymagało dojście do stanu równowagi, jednak z uwagi na duże znaczenie

tego efektu w opisie elektrycznych własności struktury półprzewodnikowej został on na rys. 5 przedstawiony oddzielnie w postaci linii **Rozpraszanie — nośnik — nośnik i jonizacja zderzeniowa.**

PODSUMOWANIE

Przedstawiona praca jest poświęcona zagadnieniom modelowania generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych. W Części I pracy dokonano przeglądu stosowanych zwykle sposobów uwzględnienia rozpraszania ciepła w modelach termicznych i elektrotermicznych przyrządów oraz przedstawiono opracowany przez autora schemat przepływu energii w strukturze półprzewodnikowej.

W rozdz. 2 omówiono typowe modele z jednorodnymi źródłami ciepła wraz z przykładami wykorzystania ich do zamodelowania rozpraszania ciepła w różnych przyrządach półprzewodnikowych. Są to modele proste, nie uwzględniające złożonego charakteru rozpraszania ciepła w przyrządzie i, jak to wykazano w pracy, nadają się one głównie do modelowania rozpraszania ciepła w stanach ustalonych oraz w wolnozmiennych stanach przejściowych.

W rozdz. 3 przedstawiono stosowane dotychczas dokładne modele generacji ciepła wraz z drogami prowadzącymi do ich uzyskania. Modele te różnią się od siebie w sposób istotny chociaż, zdaniem ich autorów, każdy z nich modeluje dokładnie przestrzenny rozkład wydzielania ciepła w przyrządzie półprzewodnikowym. W celu zweryfikowania ich dokładności zaproponowano w rozdz. 4 schemat przepływu energii w strukturze półprzewodnikowej, który może być podstawą do pełnej analizy procesów wydzielania ciepła w przyrządzie półprzewodnikowym. Schemat ten jest przedstawiony na rys. 5.

Zgodnie z tym schematem zamiana na ciepło energii elektrycznej dostarczanej do przyrządu półprzewodnikowego nie odbywa się bezpośrednio ale ma charakter procesu co najmniej dwuetapowego. Pierwszy etap odpowiada wymianie energii pomiędzy polem elektrycznym i swobodnymi nośnikami, natomiast w drugim etapie następuje wymiana energii pomiędzy swobodnymi nośnikami i siecią czyli fononami. Etapy te są od siebie niezależne i w każdym z nich energia może przepływać w obu kierunkach. Z tego względu należy zachować szczególną ostrożność przy określaniu funckji gęstości wydzielania ciepła, tak aby z jednej strony uwzględnić wszystkie mechanizmy generacji ciepła ale z drugiej strony aby energia związana z żadnym z tych mechanizmów nie została w funkcji uwzględniona. Wnioski wynikające z tego schematu zostały wykorzystane w Części II [21] do opracowania pełnego zestawu wzorów modelujących wydzielania ciepła w przyrządzie półprzewodnikowym we wszystkich procesach uwzględnionych na schemacie.

BIBLIOGRAFIA

1. P. D. Davidov: *K teorii inzenernego rasceta nestacionarnych teplovych procesov v moscnych poluprovodnikovych priborach.* Elektricestvo, 1966, nr 4, ss. 46–51
2. C. Szałomski: *Pomiary temperatury nieustalonej złącza oraz wyznaczenie oporu cieplnego przejściowego tyrystora.* Przegląd Elektrotech., 1968, vol. 44, nr 8, ss. 856–860

3. A. Ambrozy: *Transistor thermal–resistance measurement using the ultralinear thermometer principle*, Electron. Lett., 1969, vol. 5, nr 5, ss. 100–101
4. H. P. Hempel: *Zur Bestimmung des hochsten Augenblickwertes der Ersatzsperrschichttepmeratur bei Leistungs–Halbleiterbauelementen*, Elektrotech. Z. (ETZ), 1972, vol. 93, nr 1, ss. 32–35
5. N. D. Zommer, D. L. Feucht, R. W. Heckel: *Realiability and thermal impedance studies is soft soldered power transistors*, IEEE Trans. Electron Devices, 1976, vol. ED–23, nr 8, ss. 843–850
6. B. Abramenko, M. Voigt: *Berechnung der instantionaren Temperaturverteilung in Thyrystor*, Archiv für Elektronik, 1967, vol. 51, nr 4, ss. 262–273
7. W. Newell: *Transient thermal analysis of solid-state power devices – making a dreaded process easy*, IEEE Trans. Ind. Appl., 1976, vol. IA–12, nr 4, ss. 405–420
8. E. T. Wheanthen: *Computer-aided thermal analysis of power semiconductor devices*, IEEE Trans. Electron Devices, 1970, vol. ED–17, nr 9, ss. 73–80
9. M. Domingos: *Transient temperature rise in silicon semiconductor devices*, IEEE Trans. Electron Devices, 1975, vol. ED–22, nr 1, ss. 20–21
10. D. P. Kennedy: *Spreading resistance in cylindrical semiconductor devices*, J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, nr 8, ss. 1490–1497
11. D. de Cogan, A. K. Shah: *Stub TLM modelling of heat flow in semiconductor devices*, J. Phys., 1986, vol. 19, ss. 721–725
12. M. M. Minot: *Thermal characterization of microwave power FETs using nematic liquid cristals*, IEEE MTT–S Dig., 1986, ss. 495–498
13. A. A. Jaecklin, A. Marek: *Instantaneuous temperature profiles inside semiconductor power devices – Part I*, IEEE Trans. Electron Devices., 1974, vol. ED–21, nr 1, ss. 50–53
14. A. Marek, A. A. Jaecklin, J. Cornu: *Instantaneuos temperature profiles inside semiconductor power devices – Part II*, IEEE Trans. Electron Devices., 1974, vol. ED–21, nr 1, ss. 54–60
15. D. E. Sawyer, D. W. Bernin g: *Thermal mapping of transistor with a laser scanner*, Proc. IEEE, 1976, vol. 64, nr 11, ss. 1643–1635
16. L. G. Walshak, W. E. Poole: *Thermal resistance maesurement by IR scanning*, Mocrowave J., 1977, vol. 20, nr 2, ss. 62–65
17. D. J. Panow: *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych*, Warszawa, PWN, 1955
18. H. S. Carslaw, J. C. Jaeger: *Conduction of heat is solids*, Oxford, Clarendon Press, 1959
19. R. D. Richtmayer, K. W. Morton: *Raznostnyje metody resenija krajewych zadac*, Moskwa, Mir, 1972
20. Z. Lisik: *Metody wyznaczania rozkładu temperatury w półprzewodnikowej pastylce przyrządów półprzewodnikowych*, Rozp. Elektrotech., 1978, vol. 24, nr 4, ss. 759–811
21. Z. Lisik: *Modelowanie generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych – Część II: Funkcje rozpraszania ciepła*, Kwart. Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, z. 1, ss. 165–186
22. Z. Lisik: *Computer thermal model of thyristor for dynamic states*, ECCTD'80, 2–5 wrzesień 1980 Warszawa, ss. 343–348
23. I. Somos, D. E. Piccona: *Temperature excursion in thyristors due to short current pulses during forward conduction and reverse recovery phase*, IEEE IAS'74, Pittsburgh, ss. 495–508
24. S. P. Gaur, D. H. Navon: *Two-dimesional carrier flow in transistor structure under nonisothermal conditions*, IEEE Trans. Electron Devices, 1976, vol. ED–23, nr 1, ss. 50
25. S. P. Gaur: *Finding temperature distribution in high voltage transistor*, IBM Tech. Disc. Bull, 1977, vol. 19, nr 8, ss. 3147–3149
26. P. Stepanov, A. Zur: *Ein digitales Modell zur Untersuchung des Einschaltverhaltnis des Thyristores unter Berücksichtigung der thermischen Materialkonstanten–Drift*, Wiss. Z. Tech. Hochschulle Ilmenau, 1974, nr 3, ss. 103–110
27. C. T. Sah: *The equivalent circuit model in solid-state electronic – III*, Solid-State Electron, 1970, vol. 13, nr 12, ss. 1547–75
28. W. Schockley: *P-n junction in semiconductors*, Bell System Tech. J. 1949, vol. 28, nr 3, ss. 435–489

29. A. Chryssafis, W. Love: *A computer-aided analysis of one-dimensional thermal transients in n-p-n power transistors,* Solid-State Electron, 1979, vol. 22, nr 3, ss. 249–256
30. W. S. Adler: *Accurate calculations of the forward drop and power dissipation in thyrystors,* IEEE Trans. Electron Devices, 1978, vol. ED–25, nr 1, ss. 16–22
31. D. H. Navon: *A theorem on heat generation in semiconductors devices,* Proc. IEEE, 1978, vol. 66, nr 4, ss. 520–522
32. A. Nowakowski, J. Gajkiewicz: *Computer simulation of power transistor operation as a step to automatic SOA determination,* V Int. Conf. on Control Systems & Computer Science, Bucharest, 1983, ss. 343–350
33. W. R. Wilcox: *Heat transfer in power transistors,* IEEE Trans. Electron Devices, 1963, vol. ED–10, nr 9, ss. 308–313
34. R. C. Joy, E. S. Schiling: *Thermal properties of very fast transistors,* IEEE Trans. Electron Devices, 1970, vol. ED–17, nr 8, ss. 583–593
35. A. I. Kocetov, B. K. Petrov, B. F. Synorov: *K vaprosu rasceta stacionarnych temperaturnych polej v tranzistorach s krugovym emitterom,* Izv. VUZ Fiz., 1972, nr 1, ss. 122–124
36. Kemeny: *Peak temperature during turn-over and the volumetric degradation of switching transistors and IC-s,* Microelectron & Reliability, 1974, vol. 13, ss. 103–118
37. V. Ramamuthy, P. K. Chaturvedi, D. Kakati: *Temperature rise in microwave p-i-n diodes: a computer aided analysis,* Solid State Electron., 1981, vol. 24, ss. 445–453
38. L. H. Holway: *Transient temperature behaviour in pulsed doubledrift IMPATT diodes,* IEEE Trans. Electron Devices, 1980, vol. ED–37, nr 2, ss. 433–442
39. W. Nakwaski: *Dynamic thermal properties of stripe geometry laser diodes,* IEE Proc., 1984, vol. 131, nr 3, ss. 94–102
40. D. K. Sharma, K. V. Ramanathan: *Modeling thermal effects on MOS I–V characteristics,* IEEE Electron Devices Lett., 1983, vol. EDL–4, nr 10, ss. 362–364
41. D. de Cogan, S. A. John: *A two-dimensional transmission line matrix model for heat in power semiconductors,* J. Phys. D., 1985, vol. 18, ss. 507–516
42. A. Silard, M. Bodea: *Transient thermal response of amplifying gate thyristors,* Electron. Lett., 1976, vol. 12, nr 8, ss. 188–189
43. I. Lundstrom: *Temperature rise in thyristor during turn-on,* Int. J. Electronics, 1967, vol. 23, nr 1, ss. 69–81
44. Y. Tarasowa, H. Fukui: *Calculation of two-dimensional temperature rise distribution in a thyristor,* IEEE Trans. Electron Devices, 1976, vol. ED–23, nr 8, ss. 980–982
45. M. Kamoshida, K. Kani, K. Sato, T. Okada: *Heat transfer analysis of beam-lead transistor chip,* IEEE Trans. Electron Devices, 1970, vol. ED–17, nr 10, ss. 863–870
46. J. Houghton, S. D. Smith: *Fizyka podczerwieni,* Warszawa: PWN, 1975
47. P. S. Kiriejew: *Fizyka półprzewodników,* Warszawa: PWN, 1971
48. A. R. Stokes: *The theory of the optical properties of inhomogeneous materials,* E. & F. N. Spow Ltd., London, 1963
49. A. Sala: *Radiacyjna wymiana ciepła,* Warszawa: PWN, 1982
50. J. P. Holman: *Heat transfer,* New York: McGrow-Hill Book Comp. Inc., 1963
51. R. J. Collins, H. Y. Fan: *Infrared lattice absorption band in germanium, silicon and diamond,* Phys. Rev., 1954, vol. 93, nr , ss. 674–678
52. F. A. Johnson: *Lattice absorption band in silicon,* Proc. Phys. Soc., vol. 73, nr 2, 1959, ss. 265–272
53. P. G. Dawber, R. J. Elliot: *Theory of the infrared absorption of carriers in germanium and silicon,* Proc. Phys. Soc., 1963, vol. 81, nr 2, ss. 453–600
54. J. F. Angress, A. R. Goodwin, S. D. Smith: *A study of the vibrations of boron and phosphorus in silicon by infrared absorption,* Proc. Soc., 1965, vol. A287, nr 1408, ss. 64–68
55. A. H. Kahn: *Theory of the infrared absorption bands in p-type germanium,* Phys. Rev, vol. 97, 1955, nr 5, ss. 1647–1652
56. H. B. Briggs, R. C. Fletcher: *New infrared absorption bands in p-type germanium.* Phys. Rev., 1952, vol. 87, ss. 1130

57. E. Burstein, P. H. Egli: *The physics of semiconductor materials*, Advances in Electronics and Electronic Physics, 1955, vol. 7, ss. 1–84
58. E. Burstein, C. S. Picus, N. Sclar: *Optical and photoconductive properties of silicon and germanium*, Proc. Photo-conductivity Conf., Atlantic City 1956, ss. 353
59. W. Kohn: *Shallow Impurity States in Silicon and Germanium*, Solid State Physics, 1957, vol. 5, ss. 257– 320
60. P. A. Schumann, W. A. Keenan, A. H. Tong, H. H. Gegenwarth, C. P. Schneider: *Silicon optical constants in the infrared*, J. Electrochem. Soc., 1971, vol. 118, nr 1, ss. 145–148
61. J. Sah: *Hot electrons and phonons under high intensity photoexcitation of semiconductor*, Solid State Electron, 1978, vol. 21, nr 1, ss. 43–50
62. V. E. S. Ivalo: *Pulse rating charts for the loadability of semiconductor devices*, Electron. Appl., 1962, vol. 22, nr 4, ss. 148–162
63. D. J. Fleming: *Thermal breakdown delay time in silicon p-n junctions*, IEEE Trans. Electron Devices, 1971, vol. ED–18, nr 2, ss. 94–97
64. G. Gibbons, T. Misawa: *Temperature and current distribution in avalanching p-n junction*, Solid-St. Electron, 1968, vol. 11, ss. 1007–100014
65. A. Silard, M. Bodea, M. Luca: *Predicting in the surge capability of power thyristors*, Electron. Lett., 1980, vol. 16, nr 9, ss. 325–327
66. P. R. Gray, D. J. Hamilton: *Analysis of electrothermal integrated circuits*, IEEE J. Solid-St. Circuits, 1971, vol. SC–6, nr 1, ss. 8–14
67. Z. Lisik: *Modelowanie generacji ciepła w przrządach półprzewodnikowych – Część III: Wkład efektów termoelektrycznych do bilansu energetycznego przyrządu półprzewodnikowego*, Kwart. Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, z. 1, ss 187–208

Z. LISIK

MODELLING OF HEAT GENERATION IN SEMICONDUCTOR DEVICES

PART I: ENERGY BALLANCE OF SEMICONDUCTOR STRUCTURE

Summary

In Part I of the paper a review of usually used to approaches heat dissipation in thermal and electrothermal models of semiconductor devices is presented. Two groups of the models, with uniform and nonuniform heat sources, respectively, have been separated. A scheme of energy transfer inside of the semiconductor structure, which permits to verify the accurance of the models, has been developed. The scheme is used in Part II, to the develop of a set of heat dissipation functions which permits to verify the up to date used heat generation models as well as to form new ones.

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, z. 1–2, SS. 167-188

621.382.066
356.24.083

Modelowanie generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych

ZBIGNIEW LISIK

Instytut Elektroniki, Politechnika Łódzka

Otrzymano 1990.04.08

Autoryzowano do druku 1990.08.22

CZĘŚĆ II: FUNKCJE ROZPRASZANIA CIEPŁA

W II Części pracy przedstawiono zbiór funkcji rozpraszania ciepła w procesach wymiany energii pomiędzy swobodnymi nośnikami a siecią. Zbiór ten może być wykorzystany zarówno do weryfikacji poprawności istniejących już modeli generacji ciepła jak i tworzenia nowych modeli, odpowiednich dla przyjętych modeli elektrycznych przyrządu półprzewodnikowego. Korzystając z tego zbioru wykazano w pracy błędność stosowanych dotychczas tzw. *„dokładnych"* modeli generacji ciepła opisanych w Części I pracy. Przedyskutowano również zakres stosowalności zbioru funkcji rozpraszania ciepła oraz przedstawiono sposoby tworzenia w oparciu o ten zbiór nowych modeli generacji ciepła.

1. WSTĘP

W Części I [1] dokonano przeglądu stosowanych dotychczas sposobów modelowania generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych oraz przedstawiono schemat przepływu energii w strukturze półprzewodnikowej uwzględniający wszystkie procesy wymiany energii. Zgodnie z tym schematem zamiana energii elektrycznej dostarczanej do przyrządu półprzewodnikowego na ciepło nie odbywa się bezpośrednio ale ma charakter procesu co najmniej dwuetapowego. Pierwszy etap odpowiada wymianie energii pomiędzy polem elektrycznym i swobodnymi nośnikami, natomiast w drugim etapie następuje wymiana energii pomiędzy swobodnymi nośnikami i siecią czyli fononami. Etapy te są od siebie niezależne i w każdym z nich energia może przepływać w obu kierunkach. Tak więc, aby wyznaczyć funkcję gęstości wydzielania ciepła w strukturze półprzewodnikowej wystarczy uwzględnić wszystkie procesy wymiany energii pomiędzy swobodnymi nośnikami i siecią, a podstawą do tego może być schemat przepływu energii przedstawiony na rys. 5 w Części I, na którym te procesy są wyodrębnione.

Korzystając z tego schematu podjęto w tej części pracy próbę utworzenia zbioru funkcji pozwalających na określenie wielkości mocy cieplnej rozpraszanej we wszystkich procesach ujętych na schemacie. W Części I procesy wymiany pomiędzy swodobnymi nośnikami a siecią zostały podzielone na procesy generacyjno-rekombinacyjne, w których zmianie energii swobodnych nośników towarzyszy zmiana ich koncentracji, oraz na procesy relaksacyjne, w których zmiana energii swobodnych nośników jest jedynie wynikiem zderzeń nośników z fononami i defektami sieci. Podział ten jest generalnie utrzymany także w tej części pracy, chociaż zupełne rozdzielenie tych procesów jest niemożliwe z uwagi na to, że procesom rekombinacyjno-generacyjnym mogą towarzyszyć efekty relaksacyjne, jak to ma np. miejsce w przypadku rekombinacji Augera. Z tego względu, aby uprościć sformułowanie odpowiednich funkcji, te towarzyszące efekty zostały uwzględnione bezpośrednio w rozdziale poświęconym wyznaczaniu funkcji rozpraszania ciepła w procesach rekombinacji. Z tych samych względów pozostała część procesów relaksacyjnych została podzielona na dwie grupy, dla których odpowiednie funkcje gęstości rozpraszania ciepła zostały sformułowane oddzielnie w dwóch kolejnych rozdziałach. Jedną z nich stanowią procesy relaksacyjne, w których jest oddawana energia kinetyczna związana z prędkością unoszenia, natomiast drugą, tzw. efekty termoelektryczne wywołane przemieszczaniem się nośników przez niejednorodną strukturę półprzewodnikową.

2. WYDZIELANIE CIEPŁA W PROCESACH REKOMBINACJI

Rekombinacja obejmuje wszystkie procesy, w których końcowym efektem jest anihilacja pary dziura-elektron. Intensywność procesów rekombinacyjnych jest zwykle opisywana przez szybkość rekombinacji R lub czas życia τ, które są z sobą powiązane zależnością:

$$R = \frac{dn}{dt} = \frac{n - n_0}{\tau} = \frac{\Delta n}{\tau} \tag{1}$$

gdzie: n i n_0 sa odpowiednio, aktualną i równowagową koncentracją nośników.

W każdym akcie rekombinacyjnym swobodne nośniki tracą energię równą sumie szerokości przerwy zabronionej W_g oraz energii kinetycznej, jaką posiadają rekombinujące z sobą elektron i dziura. Zakładając, że ta energia kinetyczna jest statystycznie równa $\frac{3}{2}$kT, tzn. średniej energii swobodnych nośników w pasmach, można przyjąć, że moc P oddawana przez swobodne nośniki w procesach rekombinacyjnych jest równa:

$$P = R(W_g + 3\mathrm{kT}). \tag{2}$$

Z uwagi na formę jaką przyjmuje energia wyzwolona w procesie rekombinacji, procesy te dzielą się na procesy rekombinacji promienistej, rekombinacji fononowej

oraz rekombinacji zderzeniowej zwanej też często rekombinacją Augera. Każda z tych form rekombinacji ma swoją własną szybkość rekombinacji, odpowiadający jej czas życia oraz odpowiadającą jej intensywność rozpraszania energii. Uwzględniając to, całkowitą szybkość rekombinacji R, całkowity czas życia τ oraz całkowitą moc P, występujące we wzorach (1) i (2), można przedstawić jako równe:

$$R = R_{pr} + R_f + R_A \tag{3}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{pr}} + \frac{1}{\tau_f} + \frac{1}{\tau_A} \tag{4}$$

$$P = P_{pr} + P_f + P_A \tag{5}$$

gdzie indeksy pr, f, i A odpowiadają, odpowiednio, rekombinacji promienistej, fononowej i Augera.

W procesach rekombinacji promienistej prawie cała energia jest przejmowana przez gaz fotonowy i z tego względu procesy te mogą być w modelach generacji ciepła pominięte[1]. Zgodnie ze schematem przepływu energii, fotony mogą jednak, w wyniku ich emisji przez strukturę półprzewodnikową, wynieść poza obszar struktury energię uzyskaną od swobodnych nośników. Jak to wykazano w [2], w przypadku dominacji procesów rekombinacji promienistej w diodzie p-n energia ta może być większa od energii elektrycznej dostarczanej do diody w wyniku spolaryzowania jej w kierunku przepustowym. W takiej sytuacji należy oczekiwać wyrównania strat energii swobodnych nośników na drodze dopływu energii od sieci, a więc ochłodzenia struktury. Efekt taki był doświadczalnie zaobserwowany w diodzie LED wykonanej z GaAs [3], jednak w przypadku przyrządów półprzewodnikowych wykonanych z krzemu lub germanu jest on do pominięcia z uwagi na pomijalnie mały wkład rekombinacji promienistej do całości procesów rekombinacyjnych (np. w Si stosunek R_{pr}/R wynosi ok. 10^{-5} [4]).

Zgodnie ze schematem przepływu energii ciepło wydziela się bezpośrednio jedynie podczas rekombinacji fononowej, natomiast w procesie rekombinacji Augera energia jest przekazywana prawie w całości gorącym nośnikom. Ostatecznie trafia ona jednak do sieci w wyniku relaksacji tych nośników, a więc jest również zamieniana na ciepło. Z tego względu oba te procesy rekombinacyjne możemy traktować jako procesy generacji ciepła a odpowiadające im składniki wzoru (5) jako gęstości rozpraszania ciepła w tych procesach. Zasadność takiego uproszczonego sposobu potraktowania przepływu energii wydzielanej podczas rekombinacji Augera będzie jeszcze szerzej przedyskutowana w dalszej części rozdziału.

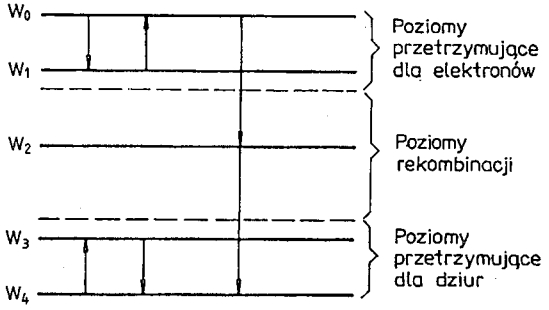
2.1. REKOMBINACJA FONONOWA

Pojęcie rekombinacji fononowej obejmuje wszystkie procesy, w których końcowym efektem jest przekazanie energii bezpośrednio drganiom sieci. Najprostszym

[1] Jak to pokazano w Części I, rekombinacja promienista w półprzewodnikach ze skośną przerwą energetyczną odbywa się z udziałem fononu, a więc wymianą energii z siecią. Jest ona jednak na tyle mała, że można ją pominąć.

przypadkiem rekombinacji fononowej jest przejście pasmo-pasmo z udziałem jednego lub kilku fononów. Proces ten odgrywa podstawową rolę w materiałach o małej szerkości pasma zabronionego rzędu 0.2—0.3 eV [5]. Wynika to z ograniczeń na maksymalną energię, którą można przekazać powstającemu fononowi. Może ona być najwyżej równa tzw. energii Debya'a kT_D, gdzie k — stała Bolzmana a T_D — temperatura Debye'a [6].

W materiałach o szerokości pasma zabronionego większej niż 0.5 eV dominującą rolę odgrywają procesy rekombinacji poprzez poziomy energetyczne położone w paśmie zabronionym. Ich źródłem są różnego rodzaju zakłócenia regularności sieci krystalicznej wynikające z niedoskonałości procesów technologicznych lub wprowadzone do materiału celowo [7]. Nie wszystkie powstałe w ten sposób poziomy energetyczne uczestniczą w procesach rekombinacji. Poziomy położone blisko pasm dozwolonych oddziaływują tylko z bliższym pasmem a wychwycone nośniki po krótkim pobycie na takim poziomie ulegają ponownie cieplnemu wzbudzaniu do pasma dozwolonego (rys. 1). Poziomy te nazywa się poziomami przetrzymywania



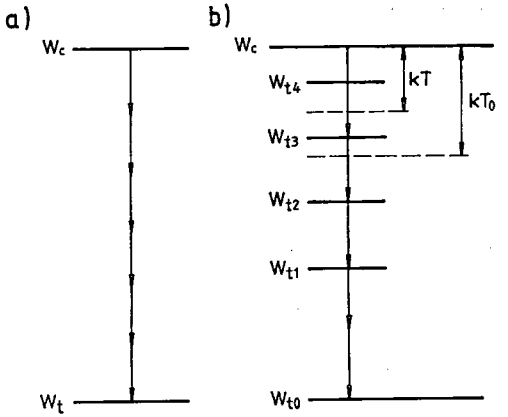
Rys. 1. Podział poziomów dozwolonych w paśmie zabronionym na poziomy przetrzymujące i rekombinacji

a wytwarzające je defekty centrami przetrzymywania lub pułapkami. Centra posiadające poziomy dozwolone w głębi pasma zabronionego są zdolne do kolejnego wychwytu elektronu z pasma przewodnictwa i dziury z pasma walencyjnego z jednoczesną ich rekombinacją. Centra te noszą nazwę centrów rekombinacji a odpowiadające im poziomy, poziomów rekombinacji. Ze względu na dużą odległość tych poziomów od pasm dozwolonych, powrotny przeskok cieplny jednego z nośników do pasma dozwolonego jest w tym przypadku mało prawdopodobny.

Duża odległość poziomów rekombinacji od pasm dozwolonych jest też powodem małego prawdopodobieństwa zajścia rekombinacji poprzez centrum z udziałem jednego fononu. Proces ten wymaga zwykle jednoczesnego wytworzenia większej ilości fononów jak to pokazano na rys. 2a. Zjawisko to nosi nazwę rekombinacji wielofononowej i jest szerzej opisane w pracach [8,9].

Początkowo sądzono, że procesy rekombinacji wielofononowej odgrywają decydującą rolę w takich materiałach jak krzem czy german. Jednakże dokładne pomiary przekroju czynnego na wychwyt dla różnych domieszek wykazały duże rozbieżności pomiędzy wielkościami pomierzonymi a wyznaczonymi teoretycznie w oparciu o Coulombowski model centrum. Doprowadziło to do sformułowania modelu

nowego procesu rekombinacyjnego z udziałem fononów, tzw. kaskady fononów [10—14]. Wymaga ona istnienia pewnej liczby wzbudzonych stanów elektronowych związanych z danym centrum rekombinacji i składa się z serii kolejno następujacych po sobie jednofononowych przejść pomiędzy tymi stanami przy czym możliwe jest wystąpienie w końcowym etapie przejść wielofononowych (rys. 2b). Uwzględnienie hipotezy kaskady fononów daje istotne zmniejszenie różnic pomiędzy wynikami doświadczalnymi a teoretycznymi, ale jak wykazały dokładne obliczenia [14], powstanie wymaganych przy kaskadzie stanów wzbudzonych jest w pewnych przypadkach niemożliwe.



Rys. 2. Rekombinacja wielofononowa (a) i rekombinacja poprzez kaskadę fononów (b) (W_{t0} — poziom stanu podstawowego centrum, W_{ti} — poziomy jego stanów wzbudzonych)

W literaturze postuluje się jeszcze inne mechanizmy rekombinacji fononowej takie jak np. przejścia mieszane [15,16] (rys. 10b w Części I), czy przejścia wielofononowe z udziałem relaksacji sieci [17,18]. Wszystkie te modele tłumaczą szereg obserwowanych doświadczalnie zjawisk, w miarę postępu badań ulegają one kolejnym zmianom i modyfikacją, ale w dalszym ciągu nie dają całościowego opisu procesów związanych z rekombinacją fononową. Dla celów praktycznych takie całościowe ujęcie procesów rekombinacji poprzez centra rekombinacyjne daje statystyczny model zaproponowany przez Shockley'a i Reada [19] oraz Halla [20], zwany często w literaturze modelem SRH. Nie wnikając w mechanizmy przejść pozwolił on na wyznaczenie wzorów (6) i (7) określających, odpowiednio, szybkość rekombinacji i czas życia odpowiadające poziomowi rekombinacji o energii W_t.

$$R_f = \frac{np - n_i^2}{\tau_{p0}(n + n_1) + \tau_{n0}(p + p_1)} \tag{6}$$

$$\tau_f = \tau_{p0}\frac{n_0 + n_1 + \Delta n}{n_0 + p_0 + \Delta n} + \tau_{n0}\frac{p_0 + p_1 + \Delta n}{n_0 + p_0 + \Delta n} \tag{7}$$

gdzie: n_0 i p_0 — koncentracje równowagowe elektronów i dziur,
Δn — koncentracja nadmiarowa ($\Delta n = \Delta p$)

$\tau_{p0} = (N_t C_p)^{-1}$ — stała uwzględniająca gęstość centrów rekombinacyjnych N_t i prawdopodobieństwo wychwytu dziury C_p

$\tau_{p0} = (N_t C_p)^{-1}$ — stała uwzględniająca gęstość centr rekombinacyjnych N_t i prawdopodobieństwo wychwytu elektronu C_n

n_1 i p_1 — stałe określone wzorami:

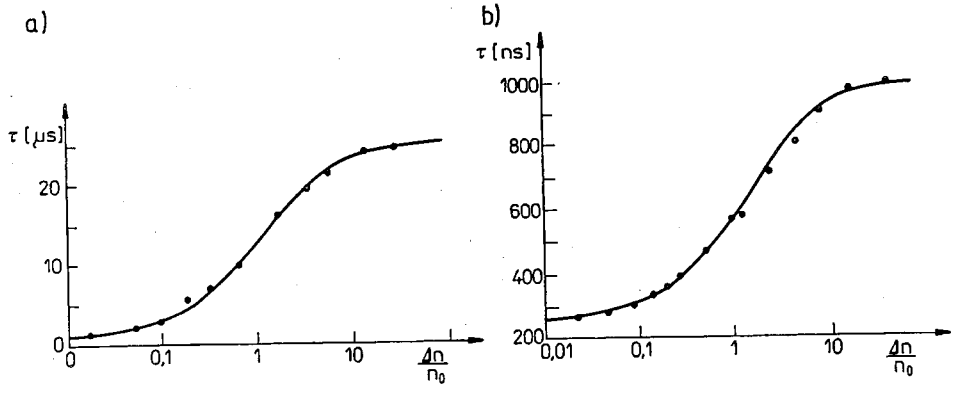
$$n_1 = N_c \exp\left(\frac{W_t - W_c}{kT}\right) \quad \text{i} \quad p_1 = N_v \exp\left(\frac{W_v - W_t}{kT}\right).$$

Wzór (7) dla warunków niskiego i wysokiego poziomu wstrzykiwania można uprościć, odpowiednio, do postaci:

$$\tau_f = \tau_{p0} \frac{n_0 + n_1}{n_0 + p_0} + \tau_{n0} \frac{p_0 + p_1}{n_0 + p_0} \tag{8}$$

$$\tau_f = \tau_{p0} + \tau_{n0}, \tag{9}$$

Wzory (8)—(9) mają tę zaletę, że określone przez nie wielkości można zmierzyć doświadczalnie i na tej podstawie wyznaczyć parametry wzorów (6)—(7). Wykorzystali to Cornu, Sitting i Zimmermann [21] dla doświadczalnego zweryfikowania modelu SRH w słabo domieszkowanych bazach struktur pnp i pnpn. Wykonane przez nich pomiary czasu życia dla szerokiego zakresu zmian poziomu wstrzykiwania wraz z aproksymującą krzywą wyznaczoną w oparciu o wzór (7) przedstawia rys. 3. Uzyskana zgodność



Rys. 3. Zależność czasu życia od stosunku nadmiarowej gęstości nośników do gęstości równowagi w temperaturze 300 K: (a) próbka pnp $\rho_n = 280$ Ωcm, (b) próbka pnpn $\rho_n = 126$ Ωcm [21]

punktów pomiarowych z krzywą teoretyczną jest prawie idealna. Pozwala to na przyjęcie założenia, że w krzemie szybkość rekombinacji fononowej R_f jest z wystarczającą dokładnością opisana przez statystyczny model rekombinacji fononowej SRH.

2.2 REKOMBINACJA AUGERA

Rekombinacja Augera obejmuje wszystkie procesy zderzeniowe, których efektem jest zanik pary dziura-elektron. Najprostszym z nich jest proste przejście pas-

mo-pasmo w wyniku zderzenia trzech nośników. Matematyczny opis tego procesu dla materiałów półprzewodnikowych z prostą przerwą energetyczną podali Beattie i Landsberg [22], a Huldt [23] uogólnił go na materiały ze skośną przerwą energetyczną. Doświadczalna weryfikacja wynikających z ich prac wniosków, a w szczególności brak potwierdzenia wyraźnej zależności czasu życia od temperatury oraz występowania progu energetycznego dla elektronów [24–26], wskazuje na stosunkowo niewielki udział tego procesu w całości procesów rekombinacji zderzeniowej. W tej sytuacji niektórzy autorzy postulowali przyjęcie za dominujący proces rekombinacji zderzeniowej przejścia z udziałem centr pułapkowych [24,25,27]. Ostatnie prace eksperymentalne wskazują jednak wyraźnie, że podstawowym procesem rekombinacji zderzeniowej jest przejście pasmo-pasmo z udziałem fononu optycznego [26,28–31].

Rekombinacja Augera w krzemie może być traktowana jako oddziaływanie elektron-elektron-dziura lub elektron-dziura-dziura, w wyniku którego następuje rekombinacja pary dziura-elektron z jednoczesnym przekazaniem prawie całej energii trzeciemu nośnikowi. Nośnik ten przechodzi na poziom energetyczny znacznie wyższy od najwyższego, normalnie zajętego poziomu w stanie równowagi cieplnej, i jest określany mianem gorącego nośnika. Z punktu widzenia własności elektrycznych półprzewodnika proces rekombinacji zderzeniowej kończy się z chwilą zaniku pary dziura-elektron, co daje odpowiednią zmianę gęstości swobodnych nośników w paśmie walencyjnym i paśmie przewodnictwa. Nie jest to jednak koniec procesu przekazywania energii. Dalszym jego etapem jest powrót gorącego nośnika na poziom energetyczny odpowiadający stanowi równowagi cieplnej. Odbywa się to w procesie relaksacji podczas, którego gorący nośnik oddaje nadmiar energii na drodze zderzeń z gazem elektronowym oraz emisji fononów optycznych[2], jak to przedstawiono w Części I na rys. 12.

Jak to już wcześniej powiedziano, cała energia wydzielona w procesie rekombinacji zderzeniowej jest ostatecznie przekazywana sieci. Może to, jednak, nastąpić w innym miejscu i czasie niż zanik pary dziura-elektron. Stwarza to w pewnych przypadkach konieczność uwzględnienia w bilansie energetycznym czasu relaksacji określającego czas życia gorących nośników. W najczęściej spotykanych warunkach pracy przyrządów półprzewodnikowych i przy gęstościach nośników odpowiadających pojawieniu się rekombinacji Augera czas relaksacji w takich materiałach jak Si czy GaAs jest rzędu $10^{-12}-10^{-11}$ s [7,32,33]. Biorąc pod uwagę, że gorący nośnik może poruszać się z prędkością nie większą niż jego prędkość termiczna, która w temperaturze 300 K jest rzędu 10^8 mm/s., może on w tym czasie przebyć drogę rzędu 1 μm. Ponieważ również czas życia rekombinacji Augera τ_A jest o kilka rzędów większy od czasu relaksacji, można w przyrządach wykonanych z tych materiałów zaniedbać efekt magazynowania i transportu energii przez gorące nośniki i założyć, że w procesie rekombinacji zderzeniowej energia jest bezzwłocznie przekazywana sieci.

Dla rekombinacji zderzeniowej zaproponowano, analogicznie jak dla rekombinacji fononowej, pewien model statystyczny wychodząc z założenia, że praw-

[2] W niskich temperaturach może także wystąpić oddziaływanie gorących nośników z domieszkami.

dopodobieństwo zderzenia potrójnego jest proporcjonalne do iloczynu gęstości uczestniczących w nim nośników. Uzyskano w ten sposób bardzo prosty wzór opisujący szybkość rekombinacji Augera:

$$R_A = C_{An}(n^2 p - n_0^2 p_0) + C_{Ap}(np^2 - n_0^2 p_0^2) \tag{10}$$

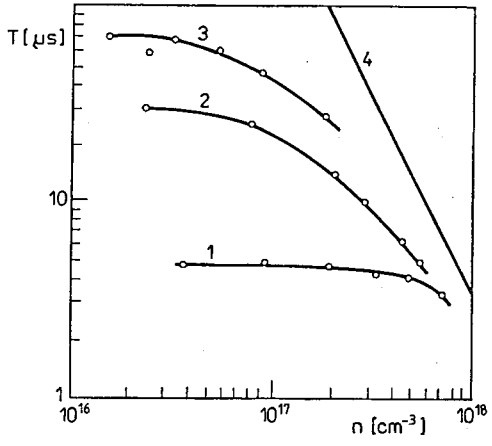
Współczynniki C_{An} i C_{Ap} oraz $C_A = C_{An} + C_{Ap}$ były wyznaczane dla krzemu przez różnych autorów zarówno na drodze teoretycznej jak i doświadczalnej a uzyskane przez nich wyniki są zebrane w Tabeli 1.

Tabela 1

Stałe rekombinacji Augera w krzemie

C_{An}	C_{Ap}	C_A	Rok	Źródło
$cm^6\,sek^{-1}$				
-	-	$5.1\ 10^{-30}$	1967	[28]
$2.\ 10^{-32}$	C_{An}	-	1971	[23]
-	-	2.10^{-31}	1971	[30]
-	-	2.10^{-31}	1972	[29]
$1.7\ 10^{-31}$	$1.2\ 10^{-31}$	$2.9\ 10^{-31}$	1973	[34]
$2.8\ 10^{-31}$	$9.9\ 10^{-31}$	$1.3\ 10^{-31}$	1977	[35]
$2.3\ 10^{-31}$	-	-	1978	[31]

Pewną weryfikacją takiego opisu procesów rekombinacji w krzemie mogą być przeprowadzone przez Kraussego [36] pomiary czasu życia w środkowym, nasyconym obszarze przewodzących diod i tyrystorów. Na rys. 4 przedstawiono porównanie uzyskanych przez niego krzywych z teoretyczną linią $\tau_A = (C_A n^2)^{-1}$ dla $C_A = 2.9 \times 10^{-31} cm^6 s^{-1}$ (poz. 5 w Tabeli I). Wskazuje ono wyraźnie na rekombinację Augera jako na proces dominujący przy dużych gęstościach swobodnych nośników.



Rys. 4. Zależność czasu życia w *„zalanym"* obszarze n-bazy tyrystora od średniej gęstości nośników w tym obszarze: krzywe 1 – 3 odpowiadają trzem różnym próbkom, linia 4 przedstawia zależność teoretyczną [36]

Można więc przyjąć, że w krzemowych przyrządach półprzewodnikowych szybkość rekombinacji R występująca we wzorze (2) jest określona przez sumę fononowej i Augerowskiej szybkości rekombinacji, przy czym o jej wartości dla małych gęstości nośników, nie przekraczających $10^{16}-10^{17}$ cm^{-3}, decydują procesy rekombinacji fononowej natomiast dla dużych gęstości nośników procesy rekombinacji Augera.

3. WYDZIELANIE CIEPŁA W PROCESACH RELAKSACJI

Rozdział ten jest poświęcony jedynie takim procesom relaksacji, w których swobodne nośniki przekazują sieci energię związaną z prędkością unoszenia. W warunkach równowagi termodynamicznej elektrony poruszają się chaotycznie od zderzenia do zderzenia z prędkością równą prędkości ruchu cieplnego v_{th}, ale ich średnia prędkość jest równa zero. Pojawienie się czynnika zewnętrznego, np. zewnętrznego pola elektrycznego, powoduje zmianę rozkładu prędkości w wyniku nałożenia się na chaotyczny ruch cieplny uporządkowanego ruchu unoszenia i teraz prędkość każdego elektronu jest równa wektorowej sumie prędkości ruchu cieplnego i unoszenia:

$$\bar{v} = \bar{v}_{th} + \bar{v}_u . \tag{11}$$

Powoduje to wzrost wartości średniej prędkości oraz wzrost średniej energii elektronów. Rozkład energii elektronów jest teraz opisany przez pewną funkcję rozkładu $f_1(W)$, która nie pokrywa się z funkcją rozkładu Fermiego-Diraca $f_0(W)$ odpowiadającą temperaturze sieci. Tak więc temperatura elektronów jest inna niż temperatura sieci i pojawiają się procesy relaksacyjne, w których elektrony tracą składową unoszenia v_u swojej prędkości, dążąc do zrównania swojej temperatury z temperaturą sieci. W procesach tych nadmiar energii jest przekazywany sieci w wyniku zderzeń, czyli tzw. rozpraszania nośników. W strukturze półprzewodnikowej występuje szereg niezależnych, konkurencyjnych w stosunku do siebie, mechanizmów rozpraszania takich jak:

- rozpraszanie na fononach akustycznych (tzw. rozpraszanie sieciowe),
- rozpraszanie na fononach optycznych (tzw. rozpraszanie optyczne),
- rozpraszanie na domieszkach zjonizowanych,
- rozpraszanie na domieszkach neutralnych,
- rozpraszanie na dyslokacjach.

W przypadku zaniku czynnika zewnętrznego proces dochodzenia do stanu równowagi jest opisany typowym równaniem wykładniczym:

$$n = n_0 \exp(-t/\tau_r) \tag{12}$$

w którym stała τ_r nosi nazwę czasu relaksacji i jest równa średniemu czasowi swobodnego przebiegu. Czas relaksacji τ_r opisuje relaksację poprzez zderzenia o charakterze izotropowym. Charakter taki mają zderzenia z fononami, ale nie można tego powiedzieć np. o rozpraszaniu na jonach domieszek. Aby móc opisać równaniem typu (12) każdy proces relaksacji wprowadzono tzw. efektywny czas

relaksacji τ_{cr} określający średnią drogę swobodną dla całkowitego zaniku składowej unoszenia prędkości. Jest on wielkością wypadkową uwzględniającą wszystkie procesy rozpraszania i jest opisany wzorem:

$$\frac{1}{\tau_{cr}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tau_{cri}} \tag{13}$$

Jeżeli stan braku równowagi termodynamicznej wywołany czynnikiem zewnętrznym utrzymuje się, proces relaksacji nie może się zakończyć i powstaje pewien stan quasi-ustalony określony przez pewną średnią wartość prędkości unoszenia v_u. Wielkość ta określa zarówno stopień braku równowagi pomiędzy swobodnymi nośnikami i siecią, jak i wielkość energii, która musi być dostarczana nośnikom dla podtrzymania tego stanu nierównowagi, i która następnie jest przekazywana sieci w procesach relaksacyjnych. Wielkości tej energii wyznaczamy wychodząc ze zwykle przyjmowanego założenia, że rozkład prędkości ruchu cieplnego jest izotopowy, zmiany prędkości unoszenia wywołane czynnikiem zewnętrznym (w naszym przypadku będzie to stałe pole elektryczne E) są liniowe a elektron podczas zderzenia traci całą energię związaną ze składową unoszenia. Dla takich założeń energia oddawana przez elektron podczas zderzenia jest równa:

$$W_e = W_{ep} - W_{ek} = \frac{m v_{um}^2}{2} = 2mv_u^2, \tag{14}$$

gdzie $v_{um} = 2v_u$ jest składową prędkości unoszenia w momencie zderzenia. Uwzględniając, że gęstość elektronów pasma przewodnictwa uczestniczących w procesach relaksacji jest równa n, a średni czas pomiędzy dwoma zderzeniami jest równy czasowi relaksacji τ_{cr}, możemy opisać gęstość mocy rozpraszanej przez elektrony w procesach relaksacji wyrażeniem:

$$p = \frac{2nm v_u^2}{\tau_{cr}} \tag{15}$$

lub, biorąc pod uwagę, że przy przyjętych założeniach czas relaksacji τ_{cr} jest związany z ruchliwością μ zależnością:

$$\tau_{cr} = \frac{2m\mu}{q} \tag{16}$$

wyrażeniem:

$$p = \frac{q n v_u^2}{\mu} = \left(q n v_u\right)^2 \frac{1}{qn\mu} = J_e^2 \rho_n \tag{17}$$

Wzór (17) opisuje rozpraszanie energii w procesach relaksacyjnych dla przypadku, gdy jedynymi swobodnymi nośnikami są elektrony pasma przewodnictwa. Jeżeli uwzględnimy, że w półprzewodniku, obok elektronów pasma przewodnictwa, występują także dziury pasma walencyjnego, to wzór (17) przyjmie postać:

$$P = J^2\rho = J^2 (q(n\mu_n + p\mu_p))^{-1} \tag{18}$$

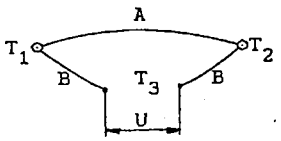
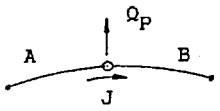
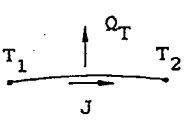
Wzór (18) jest znaną z elektrotechniki odmianą wzoru opisującego tzw. straty omowe. Jego cechą szczególną jest to, że nie zawiera on wielkości opisujących pole elektryczne, a jedynie gęstość prądu J, która jest związana z prędkością unoszenia, oraz rezystywność ρ, będącą pewną stałą materiałową charakteryzującą procesy rozpraszania w danym punkcie struktury półprzewodnikowej[3]. Cecha ta jest bardzo istotna z punktu widzenia opisu rozpraszania mocy w strukturze półprzewodnikowej, ponieważ, jak pokazano w Części I, zmiany wielkości określających pole elektryczne opisują jedynie wymianę energii pomiędzy polem elektrycznym a swobodnymi nośnikami i w ogólnym przypadku mogą nie mieć nic wspólnego z rozpraszaniem energii w procesach relaksacji.

4. PRZEPŁYW CIEPŁA W ZJAWISKACH TERMOELEKTRYCZNYCH

W Tabeli 2 przedstawiono obrazowo wszystkie efekty termoelektryczne, które mogą występować w strukturach półprzewodnikowych [37–39]. Są to:

Tabela 2

Efekty termoelektryczne

Efekt	Schemat	Warunki	Wzór
Seebecka		$T_1 \neq T_2$ $J = 0$	$U = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_{AB}\, dT$
Peltiera		$T_1 = T_2$ $J \neq 0$	$Q_P = \Pi_{AB} J$
Thomsona		$T_1 \neq T_2$ $J \neq 0$	$Q_T = \tau_T J \text{ grad } T$

– Efekt Seebecka – polegający na powstaniu napięcia na styku dwóch materiałów A i B w przypadku gdy temperatury T_1 i T_2 styków pomiędzy tymi materiałami są różne. Wielkość tego napięcia charakteryzuje współczynnik

[3] Rezystywność ρ jest zależna od aktualnej gęstości nośników i aktualnej wartości ruchliwości w danym punkcie struktury półprzewodnikowej, tak więc może przyjmować różne wartości w różnych obszarach struktury oraz może ulegać zmianom wywołanym zmianami warunków pracy przyrządu półprzewodnikowego.

$\alpha_{AB}=\alpha_A-\alpha_B$, gdzie α_A i α_B — bezwzględne termo-SEM określające własności, odpowiednio, materiału A i B.

— Efekt Peltiera — polegający na wydzielaniu lub pochłanianiu ciepła na styku dwóch przewodników przy przepływie przez ten styk stałego prądu elektrycznego. Wielkość rozpraszanego (pochłanianego) ciepła jest określona przez współczynnik Peltiera Π_{AB}. Jest on zależny od rodzaju stykających się materiałów i można go przedstawić w postaci $\Pi_{AB}=\Pi_A-\Pi_B$, gdzie Π_A i Π_B — współczynniki Peltiera określające, odpowiednio, własności materiału A i B.

— Efekt Thomsona — polegający na wydzielaniu lub pochłanianiu ciepła w czasie przepływu prądu przez przewodnik, w którym istnieje gradient temperatury. Wielkość wydzielanego (pochłanianego) ciepła jest określona przez współczynnik Thomsona τ_T.

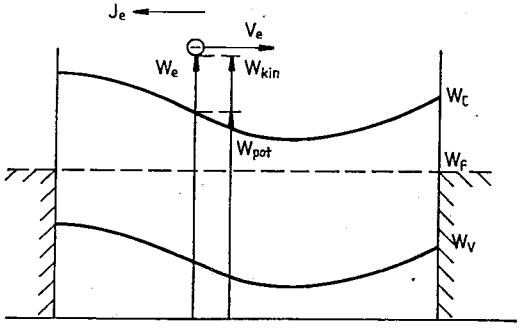
Przedstawiony wyżej opis efektów termoelektrycznych stanowi ich makroskopowy obraz widziany niejako z perspektywy zacisków przyrządu i nie może być wprowadzony bezpośrednio do mikroskopowego modelu generacji ciepła. Wymaga to odmiennego, mikroskopowego opisu tych efektów. Opis taki zostanie przedstawiony w dalszej części rozdziału przy uwzględnieniu następujących założeń:

1. przepływ energii w zjawiskach termoelektrycznych może odbywać się jedynie na drodze wymiany energii pomiędzy siecią i swobodnymi nośnikami oraz pomiędzy swobodnymi nośnikami i polem elektrycznym
2. elektrony i dziury w strukturze półprzewodnikowej znajdują się w równowadze cieplnej z siecią
3. zmiany w modelu pasmowym wywołane przepływem prądu unoszenia są pomijalnie małe
4. zjawiska termoelektryczne z punktu widzenia ich charakteru mogą być podzielone na zjawiska izotermiczne (T = *const.*) oraz zjawiska wywołane gradientem temperatury (grad $T\neq 0$)
5. zjawiska termoelektryczne z punktu widzenia ich miejsca w modelu mogą być podzielone na zjawiska powierzchniowe i objętościowe.

4.1. TERMOELEKTRYCZNE ZJAWISKA IZOTERMICZNE

Termoelektryczne objętościowe zjawiska izotermiczne występujące we wnętrzu struktury półprzewodnikowej zostaną omówione w oparciu o pasmowy model półprzewodnika przedstawiony na rys. 5. Zgodnie z nim, całkowita energia elektronu w paśmie przewodnictwa W_e jest sumą jego energii potencjalnej W_{pot}, która jest określona przez położenie krawędzi pasma przewodnictwa, oraz jego energii kinetycznej W_{kin}. Energia kinetyczna poszczególnych elektronów może być różna ale jej wartość średnia, określona zgodnie z zasadą ekwipartycji energii wzorem (22), jest zależna jedynie od temperatury.

$$W_{kin}=\frac{3}{2}kT \tag{22}$$



Rys. 5. Model pasmowy półprzewodnika niejednorodnego w stanie równowagi termodynamicznej

Elektrony uczestniczące w przepływie prądu elektrycznego J_e poruszają się z pewną średnią prędkością unoszenia v_e. Z uwagi na niejednorodność struktury powoduje to zmiany ich energii potencjalnej $W_{pot} - W_c$ i w konsekwencji, przy stałej wartości W_e, zmiany ich energii kinetycznej. Jest to równoważne zachwianiu równowagi cieplnej pomiędzy elektronami i siecią. Sytuacja ta nie jest trwała i elektrony w wyniku zderzeń z fononami uzyskują ponownie wielkości energii kinetycznej odpowiadające wartości średniej (22). Procesowi temu towarzyszy przepływ energii pomiędzy elektronami i siecią, a więc wydzielenia lub pochłanianie ciepła.

Jeżeli elektrony oddziaływują jedynie z fononami a szybkość unoszenia jest na tyle mała, że elektrony w każdym momencie są w równowadze cieplnej z siecią to wielkość wydzielonego (pochłoniętego) ciepła jest jednoznacznie określona przez zmiany energii potencjalnej elektronów. Gęstość rozpraszanego (pochłanianego) ciepła w wyniku przepływu prądu elektronowego J_e jest równa w tym przypadku:

$$P_{Pe} = \frac{1}{q} J_e \frac{dW_c}{dx}. \tag{23}$$

Uwzględniając także prąd dziurowy otrzymamy:

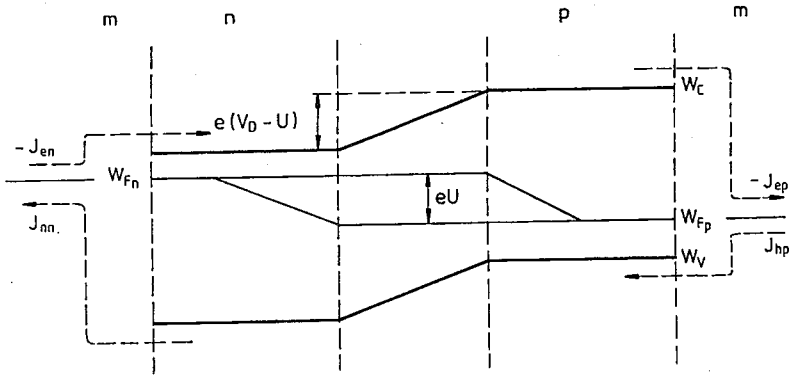
$$P_{Pv} = \frac{1}{q}\left(J_e \frac{dW_c}{dx} + J_h \frac{dW_v}{dx}\right). \tag{24}$$

Wzór (24) opisuje objętościowe wydzielanie ciepła wywołane przepływem prądu przez niejednorodny półprzewodnik znajdujący się w stałej temperaturze. Przy założeniu 3 jest to wydzielanie wywołane jedynie efektami termoelektrycznymi, jeżeli natomiast zrezygnujemy z tego założenia, wzór ten będzie opisywał zarówno wymianę ciepła w efektach termoelektrycznych jak i rozpraszanie ciepła wywołane przepływem prądu unoszenia.

Gry w modelu pasmowym, w wyniku zmiany położenia krawędzi pasm względem poziomu Fermiego, występuje zmiana typu półprzewodnika, wzór (24) opisuje efekt Peltiera na złączu p-n. Efekt ten jest generalnie efektem objętościowym jednak w pewnych przypadkach, np. gdy w modelu elektrycznym złącze jest traktowane jako

płaszczyzna, może być potrzebna interpretacja tego efektu jako efektu powierzchniowego. Interpretacja taka zostanie podana przy omawianiu powierzchniowego efektu Peltiera na styku metal-półprzewodnik.

Z uwagi na skokowy charakter styku metal-półprzewodnik, mamy na nim do czynienia z termoelektrycznym powierzchniowym zjawiskiem izotermicznym, o ile transport energii przez gorące nośniki, jak to wcześniej założyliśmy (założenie 2), jest do pominięcia. Zjawisko to zostanie omówione w oparciu o przedstawiony na rys. 6 model pasmowy diody p-n spolaryzowanej w kierunku przewodzenia. Dioda ta posiada złącze skokowe a jej kontakty metal-półprzewodnik są idealne. Dodatkowo, przyjęto dla niej, że całe napięcie U polaryzujące diodę jest odłożone na warstwie ładunku przestrzennego złącza, szerokość tej warstwy jest pomijalnie mała, a więc efekty na złączu mogą być traktowane jako płaskie, a nośniki w całym obszarze są praktycznie w stanie równowagi termodynamicznej z siecią.



Rys. 6. Model pasmowy diody p-n spolaryzowany w kierunku przewodzenia

Przyjęcie powyższych założeń pozwala na sprowadzenie wszystkich procesów wymiany energii pomiędzy swobodnymi nośnikami a siecią w rozważanej diodzie do trzech powierzchniowych procesów odbywających się, odpowiednio, w płaszczyźnie złącza p-n oraz w płaszczyznach kontaktów metal-półprzewodnik m-n i m-p. Przez diodę tą płynie prąd J posiadający w każdym punkcie składową elektronową J_e i składową dziurową J_h utworzone, odpowiednio, przez strumień elektronów płynący od kontaktu m-n do kontaktu p-m oraz strumień dziur płynących od kontaktu m-p do kontaktu n-m. Strumienie te napotykają na swojej drodze trzy bariery potencjalne, po przekroczeniu których ulega istotnym zmianom ich energia potencjalna W_{pot}. Ponieważ założyliśmy, że w każdym punkcie nośniki są w stanie równowagi termodynamicznej z siecią (założenie 2), a co za tym idzie ich energia kinetyczna jest stała i określona przez równanie (22), te zmiany energii potencjalnej mają charakter skokowy i mogą odbywać się jedynie kosztem wymiany energii z siecią. I tak, jak to pokazano poglądowo na rys. 6, elektrony tworzące prąd J_e muszą powiększyć swoją energię kosztem sieci (chłodzenie) przechodząc kolejno przez styk m-n i p-n by następnie oddać nadmiar energii (grzanie) na styku m-p, natomiast dziury tworzące prąd J_h powiększają swoją energię (chłodzenie) przechodząc przez styk m-p i p-n

a oddają nadmiar energii (grzanie) na styku m-n. Jeżeli uwzględnimy, że nośniki opuszczające kryształ półprzewodnikowy poprzez kontakt mają nieco większą energię kinetyczną, równą 2kT [38], to wielkość mocy rozpraszanej (pochłanianej) na styku metal półprzewodnik i na złączu p-n będzie określona, odpowiednio wzorami:

$$P_{Pms} = \frac{1}{q}\left(J_e(W_c - W_F + 2kT) - J_h(W_F - W_v + 2kT)\right) = \tag{25a}$$

$$= \frac{J}{q}\left(aW_g + kT\left(\ln\frac{p_0}{N_v} + 4a - 2\right)\right), \tag{25b}$$

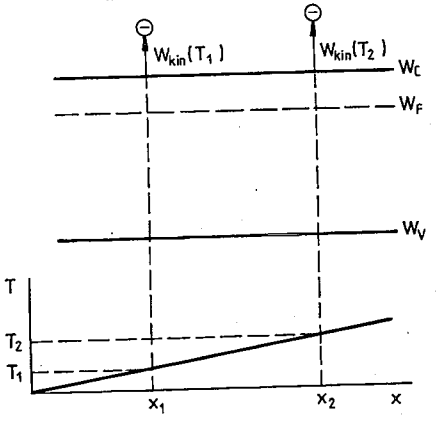
$$P_{Ppn} = -J(V_D - U), \tag{26}$$

gdzie: p_0 — koncentracja równowagowa dziur, N_v — efektywna gęstość stanów pasma walencyjnego, W_g — przerwa energetyczna, V_D — potencjał dyfuzyjny, $a = J_e/J$.

Wartość mocy określonej przez wzory (25) i (26) może przyjmować zarówno wartości dodatnie (grzanie) jak i ujemne (chłodzenie). Należy podkreślić, że znak ten nie wynika bezpośrednio ze sposobu polaryzacji diody ale jest zależny również od własności samej diody co zostało bardziej szczegółowo pokazane w [43]

4.1. TERMOELEKTRYCZNE ZJAWISKA NIEIZOTERMICZNE

Termoelektryczne zjawiska nieizotermiczne zostaną omówione w oparciu o pasmowy model półprzewodnika przedstawiony na rys. 7. Niech w półprzewodniku tym płynie strumień elektronów od x_1 do x_2. Zgodnie z (22) średnia energia kinetyczna



Rys. 7. Model pasmowy półprzewodnika w warunkach nieizotermicznych

elektronów w wyniku tego przejścia powinna wzrosnąć o $\frac{3}{2}k(T_2 - T_1)$. Ponieważ elektrony w każdym punkcie swojej drogi znajdują się w stanie równowagi cieplnej z siecią, strumieniowi temu towarzyszy wydzielanie lub pochłanianie ciepła z objętościową gęstością równą:

$$P_T = J_e \frac{dW_{kin}}{dx} = \frac{3}{2}\frac{k}{q}\frac{dT}{dx} J_e \tag{27}$$

Uwzględniając, że prąd posiada składową elektronową i dziurową można (27) przedstawić w postaci:

$$P_T = \frac{3}{2}\frac{k}{q}\left(J_e - J_h\right)\frac{dT}{dx} \tag{28}$$

Wzór (28) opisuje przestrzenny rozkład rozpraszania (pochłaniania) ciepła w procesach odpowiadających efektowi Thomsona. Należy zaznaczyć, że w większości przyrządów półprzewodnikowych procesy te mają pomijalnie mały udział w ogólnym bilansie rozpraszania ciepła, ponieważ w normalnych warunkach pracy, z uwagi na wymogi bezpieczeństwa, występują w nich zarówno stosunkowo niewielkie gradienty temperatury jak i gęstości prądów[4]. Udział ich może jednak stać się istotny w bilansach energetycznych przyrządów pracujących przy dużych gęstościach prądu takich jak np. elektroluminescensyjne diody Barrusa, lasery czy diody mikrofalowe [40—42]

5. TWORZENIE MODELI GENERACJI CIEPŁA

W poprzednich rozdziałach zostały przedstawione procesy, w których jest rozpraszane lub pochłaniane ciepło oraz utworzono zbiór funkcji pozwalający na określenie rozpraszanej (pochłanianej) w nich mocy. Zbiór ten, wraz ze schematem przepływu energii utworzonym w Części I (rys. 5), może być wykorzystany zarówno do oceny dokładności stosowanych dotychczas modeli generacji ciepła jak i do tworzenia nowych modeli, odpowiednich dla przyjętego opisu własności elektrycznych przyrządu półprzewodnikowego.

Porównując uzyskane wzory z podanymi w Części I wzorami (3) i (8), odpowiadającymi modelom generacji ciepła zaproponowanym przez Shockley'a i Saha oraz Navona i Adlera, można stwierdzić, że:

— składniki wzoru odpowiadającego modelowi Shockley'a—Saha, nie posiadają swoich odpowiedników we wzorach uzyskanych w tej części pracy ani też nie można dla nich znaleźć odpowiadających im dróg przepływu energii na schemacie przepływu energii podanym w Części I. Wynika to ze sposobu w jaki wzór ten został wyznaczony. Jest on mianowicie efektem formalnych matematycznych przekształceń wychodzących z prawdziwego założenia, że moc rozpraszana w diodzie jest równa iloczynowi UJ. W oparciu o takie przekształcenia można jednak uzyskać wiele funkcji określających objętościową gęstość rozpraszania mocy w zależności od dodatkowych założeń przyjętych podczas wyprowadzenia. Niestety, przyjęte w przypadku modelu

[4] Przeprowadzone obliczenia testowe wykazały, że w typowej diodzie krzemowej, przy gradiencie temperatury rzędu 2000K/cm, wielkość mocy rozpraszanej (pochłanianej) w tym efekcie jest około 2 rzędy mniejsza od towarzyszących mu strat omowych.

Shockley'a – Saha założenie, że w diodzie mamy jedynie do czynienia z wydzielaniem ciepła, okazało się nieprawdziwe, ponieważ mogą w niej również występować wewnętrzne przepływy energii związane z wymianą energii pomiędzy siecią i swobodnymi nośnikami w procesach rekombinacji i w efektach termoelektrycznych.

– wzór odpowiadający modelowi Navona–Adlera posiada dwa składniki, rekombinacyjny i tzw. *„potencjałowy"*, które posiadają swoje odpowiedniki we wzorach uzyskanych w tej części pracy. W składniku rekombinacyjnym nie uwzględniono w nim wprawdzie średniej energii kinetycznej rekombinujących nośników, ale nie powinno to wprowadzać istotnie dużych różnic w oszacowaniu wielkości mocy rozpraszanej w procesach rekombinacyjnych. Istotną wadą tego modelu jest natomiast ograniczenie się jedynie do procesów wymiany energii we wnętrzu struktury półprzewodnikowej. Nie uwzględniono w nim wymiany ciepła w zjawiskach kontaktowych. W efekcie określona przez ten model moc rozpraszana w przyrządzie nie jest równa mocy elektrycznej UJ dostarczanej do przyrządu, a różnica pomiędzy tymi mocami może sięgać nawet kilkudziesięciu procent [43].

Zebrane w rozdz. 2–4 wzory pozwalają na w miarę dokładne zamodelowanie procesów wymiany energii pomiędzy swobodnymi nośnikami a siecią lub, mówiąc prościej, procesów rozpraszania ciepła w strukturze półprzewodnikowej. Umożliwiają one sformułowanie kilku odmian modeli rozpraszania ciepła w zależności od sposobu zamodelowania własności elektrycznych przyrządu półprzewodnikowego.

Najbardziej ogólny model uzyskuje się łącząc z sobą wzory (2), (6) i (10) – modelujące rozpraszanie ciepła w procesach rekombinacji, wzór (24) – modelujący rozpraszanie ciepła w izotermicznych objętościowych efektach termoelektrycznych i w wyniku przepływu prądu unoszenia, wzór (28) – modelujący rozpraszanie ciepła w nieizotermicznych efektach termoelektrycznych oraz wzory (25) – modelujące rozpraszanie ciepła w kontaktowych efektach termoelektrycznych. Model taki jest dość złożony, wymaga zastosowania do zamodelowania elektrycznych własności przyrządu modelu opartego o rozwiązanie układu równań struktury półprzewodnikowej, a co za tym idzie zakres jego zastosowań jest ograniczony. W wielu praktycznych przypadkach można go jednak uprościć eliminując składniki, które opisują efekty o pomijalnie małym wkładzie do bilansu energetycznego przyrządu oraz wprowadzając w miejsce wzorów ogólnych wzory uzyskane przy pewnych założeniach upraszczających, które także znajdują się w zbiorze funkcji zaproponowanym w rozdz. 2–4.

Efektami, które w większości przypadków można pominąć są np. nieizotermiczne efekty termoelektryczne [43]. Można również uprościć opis objętościowych efektów termoelektrycznych zastępując wzór (24) wzorami (26) i (18), które reprezentują, odpowiednio, efekt termoelektryczny na złączu p-n i rozpraszanie ciepła w wyniku przepływu prądu unoszenia. Już tylko po takich uproszczeniach do zamodelowania rozpraszania ciepła wystarczy znajomość polaryzacji złącz, gęstości prądu oraz rozkładu gęstości nośników, co w większości jednowymiarowych modeli przyrządów półprzewodnikowych można uzyskać bez rozwiązywania pełnego układu równań struktury półprzewodnikowej.

Wszystkie wzory opisujące oddawanie energii przez nośniki w procesach relaksacyjnych zostały w pracy wyprowadzone przy założeniu, że gorące nośniki nie

magazynują energii ale oddają jej nadmiar drganiom sieci niejako już w momencie jej uzyskania. Założenie to może ograniczać zakres stosowalności tych wzorów, gdyż, jak to powiedzieliśmy w rozdz. 3, proces relaksacji jest procesem zachodzącym w czasie, opisuje go równanie (12), a szybkość oddawania nadmiaru energii przez gorące nośniki jest określona przez czas relaksacji τ_{cr}. Aby to założenie było spełnione szybkość z jaką energia jest dostarczana gorącym nośnikom musi być znacznie mniejsza od szybkości oddawania jej w wyniku relaksacji a droga jaką przebywa gorący nośnik od momentu uzyskania nadmiaru energii do momentu jego oddania musi być pomijalnie mała w porównaniu z wymiarami rozważanego obszaru.
Pierwszy warunek jest spełniony we wszystkich rozważanych w pracy mechanizmach generacji ciepła[5], natomiast drugi warunek wymaga szerszego omówienia.

Tabela 3

Prędkości termiczne w podstawowych materiałach półprzewodnikowych [cm/s]

Materiał	elektrony		dziury	
	T=300 K	T=1000 K	T=300 K	T=1000 K
Ge	$1{,}11\ 10^7$ $4{,}01\ 10^7$	$2{,}03\ 10^7$ $7{,}45\ 10^7$	$2{,}00\ 10^7$ $5{,}84\ 10^7$	$5{,}84\ 10^7$ $1{,}06\ 10^8$
Si	$1{,}18\ 10^7$ $2{,}68\ 10^7$	$2{,}16\ 10^7$ $4{,}89\ 10^7$	$1{,}65\ 10^7$ $2{,}92\ 10^7$	$3{,}01\ 10^7$ $5{,}33\ 10^7$
GaAs	$4{,}41\ 10^7$	$8{,}06\ 10^7$	$1{,}65\ 10^7$	$3{,}02\ 10^7$
InSb	$1{,}02\ 10^7$	$1{,}87\ 10^7$	$1{,}51\ 10^7$	$2{,}75\ 10^7$
InP	$4{,}41\ 10^7$	$8{,}06\ 10^7$	$1{,}85\ 10^7$	$3{,}37\ 10^7$

Ze względu na anizotropię masy efektywnej w krzemie i germanie dla tych materiałów półprzewodnikowych podano dwie wartości prędkości termicznej, pierwsza z nich odpowiada masie poprzecznej, natomiast druga masie podłużnej

Średnia droga jaką może pokonać gorący nośnik zanim ulegnie relaksacji jest równa iloczynowi jego średniej prędkości oraz efektywnego czasu relaksacji τ_{cr}. Można przyjąć, że prędkość ta jest równa prędkości termicznej nośnika v_{th} określonej równaniem:

$$v_{th} = \left(\frac{3kT}{m_{e,h}}\right)^{0,5}, \tag{29}$$

gdzie: $m_{e,h}$ — odpowiednio, masa efektywna elektronu lub dziury.
Prędkość ta jest funkcją temperatury i zależy od rodzaju materiału półprzewodnikowego a jej wartości oszacowane dla podstawowych materiałów półprzewodnikowych w oparciu o wzór (29), są zestawione w Tabeli III. Efektywny czas relaksacji τ_{cr} jest funkcją temperatury, natężenia pola elektrycznego oraz gęstości domieszek, defektów i swobodnych nośników [5,7,44]. Wartość jego może zmieniać

[5] Czas życia rekombinacji Augera jest o kilka rzędów większy od czasu relaksacji a szybkość przekazywania energii gorącym nośnikom w pozostałych procesach jest związana z efektywną szybkością przemieszczenia się nośników tworzących prąd i jest pomijalnie mała w porównaniu z szybkością oddawania energii w procesach relaksacyjnych.

się w szerokich granicach i np. dla krzemu obejmują one przedział 10^{-13} – 10^{-9} s [44–45], co oznacza, że droga przebyta przez gorący nośnik może teoretycznie zmieniać się od kilku nm do kilkudziesięciu μm.

Tak więc, droga jaką przebywa gorący nośnik może zmieniać się w bardzo szerokich granicach w zależności od sposobu wykonania przyrządu półprzewodnikowego oraz od warunków jakie panują w danym obszarze przyrządu. W większości przypadków jest ona jednak na tyle mała w porównaniu z obszarem rozpraszania ciepła na drodze relaksacji, że efekt przechowywania energii przez gorące nośniki powoduje jedynie pewne rozmycie rzeczywistego rozkładu rozpraszania ciepła w stosunku do rozkładu opisanego przez przedstawione w pracy wzory i nie wpływa to w sposób istotny na wyniki modelowania cieplnych własności przyrządu.

Możliwe są jednak również takie sytuacje, w których średnia droga gorących nośników jest na tyle duża w porównaniu z wymiarami przyrządu, że efekt magazynowania energii przez gorące nośniki może istotnie wpływać na procesy wymiany energii w przyrządzie, a co za tym idzie założenia przy jakich wyprowadzono podane w pracy wzory przestają obowiązywać. Klasycznym przykładem takiej sytuacji mogą być np. przyrządy w których mamy do czynienia z balistycznym przepływem nośników [46,47].

PODSUMOWANIE

W Części II pracy zajęto się wyznaczaniem zbioru funkcji rozpraszania ciepła w strukturze półprzewodnikowej wychodząc z przedstawionego w Części I wniosku, że ciepło może wydzielać się jedynie w wyniku wymiany energii pomiędzy swobodnymi nośnikami a siecią.

Procesy wymiany energii pomiędzy swobodnymi nośnikami i siecią podzielono w pracy na trzy grupy obejmujące:

– procesy generacyjno–rekombinacyjne,
– procesy relaksacyjne związane z przepływem prądu unoszenia
– procesy relaksacyjne związane z efektami termoelektrycznymi

a następnie wyodrębniono dla każdej z tych grup wzory pozwalające na dokładne opisanie rozpraszania (pochłaniania) ciepła w tych procesach. Wzory te, tworzą pewien zbiór funkcji rozpraszania ciepła, który pozwala zarówno na weryfikację poprawności istniejących już modeli generacji ciepła jak i na tworzenie nowych modeli, odpowiednich dla przyjętych modeli elektrycznych przyrządu. W rozdz. 5 zbiór ten został wykorzystany do oceny poprawności przedstawionych w Części I modeli rozpraszania ciepła zaproponowanych przez Shockley'a–Saha i Navona–Adlera. Porównanie wzorów opisujących te modele z otrzymanym w pracy zbiorem funkcji rozpraszania ciepła wykazało błędność obu tych modeli z uwagi na nieuwzględnienie przy ich tworzeniu wszystkich procesów wymiany energii zachodzących w strukturze półprzewodnikowej.

Przedstawiony w pracy zbiór funkcji rozpraszania ciepła został uzyskany przy założeniu, że magazynowanie energii przez gorące nośniki nie ma istotnego wpływu na procesy przepływu energii pomiędzy swobodnymi nośnikami a siecią i może być pominięte. Prawdziwość tego założenia była była dyskutowana w rozdz. 5. Stwierdzono tam, że chociaż w przeważającej większości przypadków założenie to jest słuszne, to jednak możliwe są również takie sytuacje, w których efekt ten może wpływać na procesy wymiany energii w przyrządzie.

BIBLIOGRAFIA

1. Z. Lisik: *Modelowanie generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych — Część I: Bilans energetyczny struktury półprzewodnikowej.* Kwart. El. i Tel., 1991, z. 1–2, ss. 139–163
2. Z. Lisik: *Heat generation in semiconductor devices,* Solid–St. Electron., 1981, vol. 24, nr 1, ss 85–87
3. G. C. Dousmanis, C. W. Mueller, H. Nelson, K. G. Petzinger: *Evidence of refrigerating action by means of photon emissin in semiconductor diodes,* Phys. Rev., 1964, vol. 133, nr 1a, ss. A316–8
4. T. C. Ong, K. W. Terrill, S. Tam, C. Hu: *Photon generation in forward-biased silicon p-n junctions.* IEEE Trans. Electron Devices Lett., 1983, vol. EDL–4, nr 12, ss. 460–462
5. P. S. Kiriejew: *Fiżyka półprzewodników,* Warszawa: PWN, 1971
6. J. M. Ziman: *Electron and phonons,* Oxford, 1960
7. R. A. Smith: *Półprzewodniki,* Warszawa: PWN, 1966
8. V. A. Kovarskij: *Mnogokvantovye perechody,* Kisiniev, Stunca, 1974
9. R. N. Hall: *Recombination processes in semiconductors,* Proc IEEE, 1959, vol. 1068, nr 17, ss. 923–931
10. M. Lax: *Giant traps,* J. Phys. Chem. Solids, 1959, vol. 8, nr 1, ss. 66–73
11. M. Lax: *Cascade capture of electrons in solids,* Phys. Rev., 1960, vol. 119, nr 5, ss. 1502–1523
12. D. R. Haman, A. L. McWhorter: *Cascade capture of electrons by ionized impurities.* Phys. Rev., 1964, vol. 134, nr 1, ss. A250–A255
13. E. F. Smith, P. T. Landsberg: *Phonon cascade theory,* J. Phys. Chem. Solids., 1966, vol. 27, nr 11, ss. 1727–1738
14. V. L. Bonc-Bruevic, V. B. Glasko: *K teorii „kaskadnoj" rekombinacji nositelej toka v gomeopoljarnych poluprovodnikach,* Fiz. Tverd. Telja, 1962, vol. 4, nr 2, ss. 510–523
15. Z. Panov: *Opticeskie processy v poluprovodnikach,* Moskwa: Mir, 1975
16. S. M. Ryvkin: *Indirect optical transitions induced by carrier interaction in semiconductors,* Phys. St. Sol., 1965, vol. 11, nr 1, ss. 285–294
17. D. V. Lang, C. H. Henry: *Nonradiative recombination at deep levels in GaAs and GaP by lattice-relaxation multiphonon emission,* Phys. Rev. Lett., 1975, vol. 35, nr 22, ss. 1525–1528
18. E. P. Sinjarskij, V. A. Kovarskij: *Kvaziklassiceskaja ocenka poprecnikov mnogofononogo zachvata v niekondonovskom priblizenii dla deformacionnogo vzaimodejstvii,* Fiz. Tverd. Telja, 1967, vol. 9, nr 5, ss. 1464–1472
19. W. Shockley, W. T. Read: *Statistics of the recombinations of holes and electrons,* Phys. Rev., 1952, vol. 87, nr 5, ss. 835–842
20. R. N. Hall: *Electron-hole recombination in germanium.* Phys. Rev., 1952, vol. 87, nr 2, s. 387
21. J. Cornu, R. Sitting, W. Zimmermann: *Analysis and measurement of carrier lifetimes in the various operating modes of power devices.* Solid-St. Electron., 1974, vol. 17, nr 10, ss. 1099–1106
22. A. R. Beattie, P. T. Landsberg: *Auger effect in semiconductros.* Proc. Royal Soc., 1959, vol. 249, nr 1256, ss. 16–29

23. L. Huldt: *Band-to-band Auger recombination in indirect gap semiconductors,* Phys. St. Sol., 1971, vol. 8, nr 1, ss. 173–187
24. I. V. Karpova, S. G. Kolashnikov: *Liftime of electrons and holes in heavily doped germanium,* Proc. Inter. Conf. Phys. Semicond., Exeter, 1962, ss. 880–885
25. P. T. Landsberg, D. A. Evans, C. Rhys-Roberts: *Auger effect involving recombination centers,* Proc. Phys. Soc., 1964, vol. 83, nr 2, ss. 325–326
26. R. Conradt, J. Aengenheister: *Minority carrier lifetime in highly doped Ge.* Solid-St. Commun., 1972, vol. 10, nr 3, ss. 321–323
27. V. S. Vavilov, E. L. Nolle: *Recombinationnoe izlucenie cistogo kremnija pri bolsom urovnie rozbuzdenija.* Fiz. i Tech. Poluprov., 1968, vol. 2, nr 5, ss. 742–743
28. L. M. Blinov, E. A. Bobrova, V. S. Vavilov, G. N. Galkin: *O rekombinacii neravnovestnych nositelej v kremjni pri vysoich urovnjach fotovozbuzdenija.* Fiz. Tverd. Telja, 1967, vol. 9, nr 11, ss. 3221–3228
29. N. G. Nilsson, K. G. Svantesson: *The spectrum and decay of the recombination radiation from strongly exited silicon,* Solid-St. Commun., 1972, vol. 11, nr 1, ss. 155–159
30. J. R. Woerdman: *Some optical and electrical properties of laser-generated free-carrier plasma in Si.* Phil. Res. Rep., 1971, suplement 7
31. V. N. Abakumov, I. N. Jassievic: *Oze-rekombinacija v kremnii,* Fiz. i Tech. Poluprov., 1977, vol. 11, nr 7, ss. 1302–1310
32. S. Zukotynski, W. Howlett: *Carrier distribution function in semiconductors,* Solid-St. Electron, 1978, vol. 21, nr 1, ss. 35–42
33. H. Kroemer: *Hot electron relaxation effects in devices,* Solid-St. Electron, 1978, vol. 21, nr 1, ss. 61–67
34. J. D. Beck, R. Conrad: *Auger Recombination in Si.* Solid-St. Commun, 1973, vol. 13, nr 1, ss. 93–95
35. J. Dziewor, W. Schmid: *Experimental comparison of localized and free carrier Auger recombination in silicon,* Appl Phys. Lett., 1977, vol. 31, ss. 346–349
36. J. Krausse: *Auger Recombination in Mittelgebiet Durchlassbelasteter Silizium-Gleichrichter und – Thyristoren,* Solid-St. Electron., 1974, vol. 17, nr 5, ss. 427–429
37. J. Tauc: *Zjawiska fotoelektryczne i termoelektryczne w półprzewodnikach,* Warszawa: PWN, 1966
38. A. Van der Ziel: *Podstawy fizyczne elektroniki ciała stałego,* Warszawa: PWN, 1980
39. A. F. Ioffe: *Poluprovodnikovye termoelementy,* Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskwa–Leningrad, 1956
40. W. Nakwaski: *The thermal properties of a single-heterostructure laser diode supplied with short current pulses,* Optical & Quantum Electronics, 1979, vol. 11, ss. 319–327
41. W. Nakwaski: *Thermal properties of Burrus-type light-emmitting diode: Part I – The model,* IEEE Trans. Electron Devices., vol. ED–33, nr 7, ss. 889–899
42. R. K. Mains, G. I. Haddad, P. A. Blankey: *Simulation of GaAs IMPATT diodes including energy and velocity transport equations,* IEEE Trans. Electron Devices, 1983, vol. ED–30, nr 10, ss. 1327– 1338
43. Z. Lisik: *Modelowanie generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych – Część III: Wkład efektów termoelektrycznych do bilansu energetycznego przyrządu półprzewodnikowego.* Kwart. Elektr. i Tel., 1991, z. 1 ss. 187–208
44. K. W. Szalimowa: *Fizyka półprzewodników,* Warszawa: PWN, 1974
45. H. P. D. Langon: *Electron transport and ionisation in silicon at high fields,* Solid-St. Electron., 1978, vol. 21, nr 1, ss. 291–295
46. M. S. Shur, L. F. Eastman: *Near ballistic electron transport in GaAs devices at 77 K.* Solid-St. Electron, 1981, vol. 24, nr 1, ss. 11–18
47. U. Gerlach-Meyer, E. Gmelin, H. J. Queisser: *Balistic electron transport detected by Seebeck voltage measurements on semiconductor micro-contacts,* 17-th Int. Conf. on Phys. of Semicond., 1985, ss. 1309–1312

Z. LISIK

MODELLING OF HEAT GENERATION IN SEMICONDUCTOR DEVICES

PART II: FUNCTIONS OF HEAT GENERATION

Summary

In Part II of the paper a set of functions describing heat generation in processes of energy exchange betwen free carriers and lattice has been shown. The set may be used to veryfy a correctness of present heat dissipation models as well as to create new models, adequated for particular electric models of a semiconductor device. Basing on the set, the unconvenience of used up to date „accurace" heat dissipation models presented in Part I has been indicated. The range of validity of the set of heat dissipation functions has been discuseed and the ways in which now models may be created basing on the set has been pointed.

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI, 1991, 37, z. 1–2, SS. 189-210

621.382.066
536.24.083

Modelowanie generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych

ZBIGNIEW LISIK

Instytut Elektroniki, Politechnika Łódzka

Otrzymano 1990.04.08

Autoryzowano do druku 1990.08.22

CZĘŚĆ III: WKŁAD EFEKTÓW TERMOELEKTRYCZNYCH DO BILANSU ENERGETYCZNEGO PRZYRZĄDU PÓŁPRZEWODNIKOWEGO

W III Części pracy dokonano oceny wkładu do bilansu energetycznego przyrządu półprzewodnikowego źródeł ciepła związanych z izotermicznymi i nieizotermicznymi efektami termoelektrycznymi. Dla każdej z tych grup źródeł ciepła przeprowadzono obliczenie testowe mające na celu określenie warunków, w których te źródła mogą mieć istotny wpływ na własności cieplne przyrządu. Jako struktury testowe wykorzystano strukturę diody idealnej, diody prostowniczej p-*v*-n oraz diody laserowej.

1. WSTĘP

W Części II [1] dokonano przeglądu mechanizmów rozpraszania ciepła występujących w strukturach półprzewodnikowych oraz zaproponowano dla każdego z nich odpowiednie funkcje określające objętościowe bądź powierzchniowe gęstości wydzielania (pochłaniania) ciepła. Obok znanych i powszechnie akceptowanych mechanizmów rozpraszania, takich jak straty rekombinacyjne i straty omowe, wyodrębniono tam również źródła ciepła związane z efektami termoelektrycznymi.

Występowanie efektów termoelektrycznych w materiałach półprzewodnikowych jest od dawna dobrze znane i badaniom ich poświęcono wiele prac tak teoretycznych jak i eksperymentalnych [2–7]. Dotychczas jednak były one traktowane jako podstawa do opracowywania specjalnych przyrządów półprzewodnikowych takich jak oparte na efekcie Seebeka ogniwa termoelektryczne [8–10] czy oparte na efekcie Peltiera pompy cieplne [11–15], natomiast nie były one uwzględniane w bilansach źródeł ciepła w pozostałych przyrządach półprzewodnikowych.

W celu określenia istotności tych termoelektrycznych źródeł ciepła dla całości procesów cieplnych zachodzących w przyrządach półprzewodnikowych dokonano w tej części pracy oceny wkładu tych efektów do bilansu energetycznego podstawowego przyrządu półprzewodnikowego jakim jest dioda.

2. TERMOELEKTRYCZNE EFEKTY IZOTERMICZNE

W [1] wyodrębniono objętościowe i powierzchniowe źródła ciepła związane z izotermicznymi efektami termoelektrycznymi i generalnie oba te rodzaje źródeł ciepła występują w każdym przyrządzie półprzewodnikowym. Jeżeli jednak założymy, że w rozważanej strukturze występują jedynie skokowe złącza p-n oddzielone od siebie obszarami o jednorodnym domieszkowaniu, to traktując te złącza jako płaszczyzny można zgodnie z [1] opisać rozpraszanie ciepła w izotermicznych efektach termoelektrycznych używając jedynie płaskich źródeł ciepła. Źródła te będą zlokalizowane na płaszczyznach odpowiadających kontaktom i złączom a wielkość rozpraszanego (pochłanianego) w nich ciepła P_{ms} i P_{pn} będzie określona, odpowiednio, przez wzory (1) i (2).

$$P_{Pms} = \frac{1}{q}\Big(J_e(W_c - W_F + 2\mathrm{kT}) + - J_h(W_F - W_v + 2\mathrm{kT})\Big) = \tag{1a}$$

$$= \frac{1}{q}\left(aW_g + \mathrm{kT}\left(\ln\frac{p_0}{N_v} + 4a - 2\right)\right) \tag{1b}$$

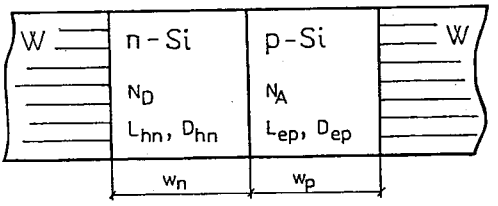
$$P_{Ppn} = -J(V_D - U), \tag{2}$$

gdzie: p_0 — koncentracja równowagowa dziur, N_v — efektywna gęstość stanów pasma walencyjnego, W_g — przerwa energetyczna, V_D — potencjał dyfuzyjny oraz $a = J_e/J$ (pozostałe wielkości są zdefiniowane na rys. 6 w [1]).

Podejście takie wyraźnie oddziela źródła ciepła związane z efektami termoelektrycznymi od pozostałych źródeł występujących w przyrządzie i z tego względu jest bardzo użyteczne przy ocenie wkładu tych efektów do całości bilansu energetycznego przyrządu. Wykorzystano je w dalszej części pracy do oceny udziału różnych procesów rozpraszania ciepła w modelowych strukturach półprzewodnikowych ze złączami skokowymi. Obliczenia te przeprowadzono dla struktury idealnej diody ze złączem p-n oraz dla struktury diody p-ν-n, odpowiadającej rzeczywistej diodzie prostowniczej BYP 401.

2.1. IDEALNA STRUKTURA DIODY p-n

Rys. 1 przedstawia strukturę diody p-n, dla której przeprowadzono obliczenia mające na celu oszacowanie wpływu jej podstawowych parametrów konstrukcyjnych, takich jak wymiary warstw i koncentracje domieszek, na procentowy udział poszczególnych źródeł ciepła w jej bilansie energetycznym. Jest to krzemowa dioda o złączu skokowym, posiadająca kontakty omowe na styku krzem — wolframowe ciepłowody. W celu uwypuklenia wpływu wewnętrznych przepływów energii na rozkład wydzielania ciepła w diodzie, przyjęto podczas obliczeń, że napięcie U polaryzujące diodę w kierunku przewodzenia jest na tyle małe, aby po obu stronach złącza panowały warunki niskiego poziomu wstrzykiwania. Założenie to pozwala na



Rys. 1. Rozważana struktura diody idealnej p-n

zaniedbanie strat omowych w diodzie jako pomijalnie małych i ograniczenie się w jej bilansie energetycznym do opisanych wzorami (1)–(2) powierzchniowych źródeł ciepła związanych z efektami termoelektrycznymi na złączu i kontaktach oraz do mocy P_R rozpraszanej w procesach rekombinacji określonej wzorami [1]:

$$P_R = R(W_g + 3kT) \tag{3}$$

$$R = \frac{\Delta n}{\tau} = \frac{np - n_i^2}{\tau_{p0}(n + n_1) + \tau_{n0}(p + p_1)} + \\ + C_{An}\left(n^2 p - n_0^2 p_0\right) + C_{Ap}\left(np^2 - n_0 p_0^2\right). \tag{4}$$

Korzystanie z wzorów (1)–(4) wymaga znajomości rozkładu nośników w analizowanej strukturze oraz gęstości płynącego przez nią prądu odpowiadajacych zadanemu napięciu U. Do wyznaczenia tych wielkości wykorzystano prosty model elektryczny rozważanej diody oparty o rozwiązanie równania ambipolarnego (5), oddzielnie, dla warstwy n i p.

$$D\frac{d^2(\Delta n)}{dx^2} = R - g - \mu E\frac{d(\Delta n)}{dx}, \tag{5}$$

W modelu tym założono, że:

– szerokość obszaru ładunku przestrzennego złącza jest pomijalnie mała i nie występuje w nim rekombinacja nośników,

– w warstwach n i p nie ma generacji nośników,

– w warstwach n i p nie występują straty omowe, a więc nie ma w nich pola elektrycznego,

– w warstwach n i p występują warunki niskiego poziomu wstrzykiwania, a co za tym idzie stała dyfuzji D i czas życia τ zależą jedynie od koncentracji domieszek w danej warstwie.

– kontakty metal – półprzewodnik są kontaktami omowymi, a co za tym idzie powierzchniowa szybkość rekombinacji na kontakcie s jest nieskończenie duża.

Po uwzględnieniu tych założeń równanie (5) upraszcza się do postaci (6):

$$L^2\frac{d^2(\Delta n)}{dx^2} = \Delta n \tag{6}$$

gdzie: $L = \sqrt{D\tau}$

wraz z odpowiadającymi mu warunkami brzegowymi (7):

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\Delta n)}{\mathrm{dx}}\right|_{x=w} = s\,\Delta n(w) \quad (7a), \qquad \Delta n(0) = \Delta n_0 \tag{7b}$$

$$\Delta n(0) = \begin{Bmatrix}\Delta n_{p0}\\ \Delta p_{n0}\end{Bmatrix}\left(\exp(qU/\mathrm{kT}) - 1\right)\begin{Bmatrix}\text{warstwa n}\\ \text{warstwa p}\end{Bmatrix}, \tag{7c}$$

gdzie w — grubość w_n lub w_p, odpowiednio, warstwy n lub p, x=0 odpowiada powierzchni złącza a dodatni kierunek osi x jest w każdej z wartw skierowany ku kontaktowi.

Dla powyższych warunków brzegowych, równanie (6) posiada rozwiązanie analityczne postaci:

$$\Delta n(x) = \Delta n(0)\left(\cosh\frac{x}{L} - \coth\frac{w}{L}\sinh\frac{x}{L}\right), \tag{8}$$

Pozwala ono na wyznaczenie gęstości całkowitego prądu J płynącego przez rozważaną strukturę diody oraz, wymaganych w równaniu (1), gęstości prądów mniejszościowych J_{hn} i J_{ep} przejmowanych przez kontakt metal — półprzewodnik w warstwach n i p:

$$J = \frac{\Delta p_n(0)\,D_{hn}}{L_{hn}}\coth\frac{w_n}{L_{hn}} + \frac{\Delta n_p(0)\,D_{ep}}{L_{ep}}\coth\frac{w_p}{L_{ep}} \tag{9}$$

$$J_{hn}(w_n) = \frac{\Delta p_{n0}\,D_{hn}}{L_{hn}}\,\frac{2}{\exp(w_n/L_{hn}) - \exp(-w_n/L_{hn})} \tag{10}$$

$$J_{ep}(w_p) = \frac{\Delta n_{p0}\,D_{ep}}{L_{ep}}\,\frac{2}{\exp(w_p/L_{ep}) - \exp(-w_p/L_{ep})}. \tag{11}$$

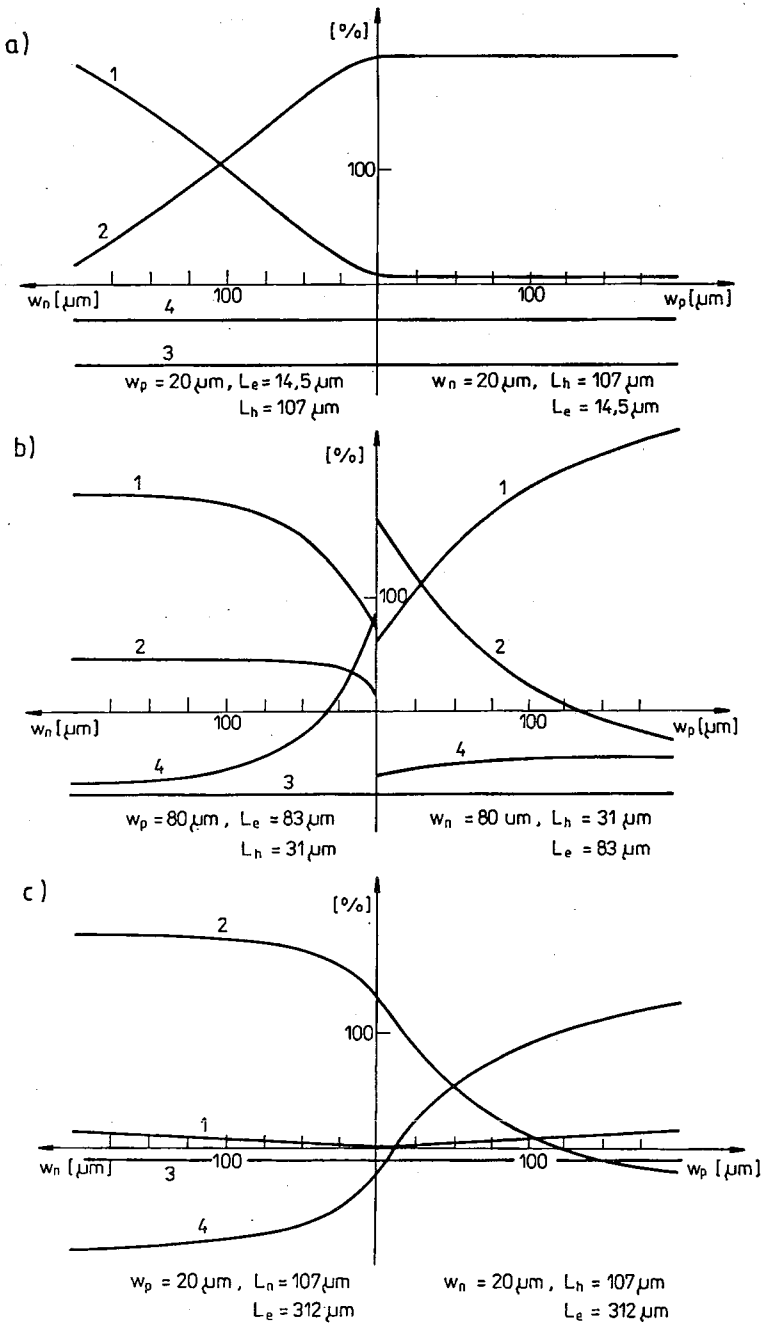
Wymagane dodatkowo wartości poziomów Fermiego przy kontaktach w warstwie n i p, W_{Fn} i W_{Fp}, oraz potencjał dyfuzyjny V_D zostały wyznaczone w oparciu o znane wzory:

$$W_{Fn} = W_{Fi} + \mathrm{kT}\ln\frac{N_D}{n_i} \tag{12a}$$

$$W_{Fp} = W_{Fi} + \mathrm{kT}\ln\frac{N_A}{n_i} \tag{12b}$$

$$V_D = \frac{\mathrm{kT}}{q}\ln\frac{N_A N_D}{n_i^2}. \tag{13}$$

W oparciu o opisany wyżej model przeprowadzono obliczenia procentowego udziału poszczególnych źródeł ciepła w diodzie dla różnych wariantów konstrukcyjnych i różnych napięć polaryzujących przyjmując, że mocy elektrycznej U^*J dostarczanej do przyrządu odpowiada 100%.Na wykresach zebranych na rys. 2a—c przedstawiono wpływ zmian wymiarów warstw na procentowy udział poszczególnych procesów rozpraszania energii. Wykazują one, że w poszczególnych procesach może być rozpraszana moc znacznie przekraczająca moc dostarczaną z zewnątrz a bilans energetyczny będzie zachowany w wyniku wewnętrznych przepływów



Rys. 2. Wpływ wymiarów warstw na procentowy udział poszczególnych form rozpraszania energii w bilansie energetycznym diody (U=0.4V, U^*J=100%): 1 — straty rekombinacyjne P_R, 2 — straty na styku m-p P_{Pmp}, 3 — straty na złączu p-n P_{Ppn}, 4 — straty na styku m-n P_{Pmn}

(a) $N_A = 10^{18} cm^{-3}$, $N_D = 10^{14} cm^{-3}$, w_n=var w_p=20μm, w_p=var w_n=20μm

(b) $N_A = 10^{16} cm^{-3}$, $N_D = 10^{16} cm^{-3}$, w_n=var w_p=80μm, w_p=var w_n=20μm

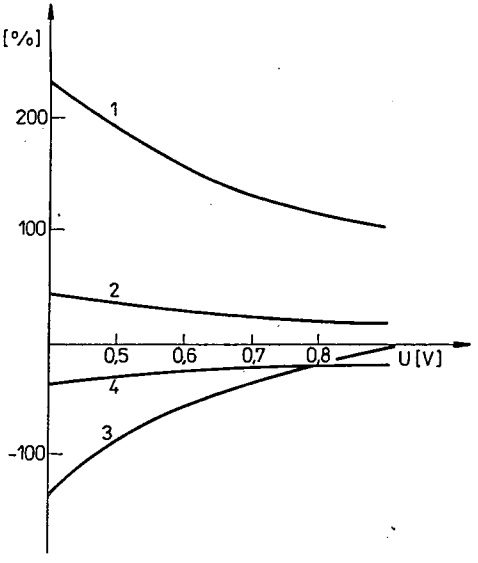
(c) $N_A = 10^{14} cm^{-3}$, $N_D = 10^{14} cm^{-3}$, w_n=var w_p=20μm, w_p=var w_n=20μm

energii. Udział poszczególnych procesów w rozpraszaniu energii ulega silnym zmianom wraz ze zmianą szerokości warstwy dla małych szerokości porównywalnych z drogą dyfuzji nośników mniejszościowych, natomiast dla szerokości dużych w porównaniu z drogą dyfuzji udział ten nie ulega zmianie. Podobną sytuację można zaobserwować w Tabeli I, która obrazuje wpływ zmian domieszkowania warstw

Tabela I

Procentowy udział poszczególnych form rozpraszania energii w bilansie energetycznym dla $w_p=140\mu m$, $w_n=40\mu m$, $U=0{,}4$ V

N_D	P_R	P_{Pmp}	P_{Ppn}	P_{Pmn}
cm^{-3}	%	%	%	%
$N_A = 10^{14}\ cm^{-3}$				
10^{14}	23,8	31,4	-14,7	39,5
10^{16}	30,2	179,9	-44,5	-65,6
10^{18}	28,5	183,8	-74,2	-38,1
$N_A = 10^{16}\ cm^{-3}$				
10^{14}	21,8	-62,8	-44,5	185,5
10^{16}	170,7	-14,8	-74,2	18,3
10^{18}	198,7	43,3	-104,1	-38,0
$N_A = 10^{18}\ cm^{-3}$				
10^{14}	20,1	-34,1	-74,2	188,2
10^{16}	151,4	-34,0	-104,1	86,6
10^{18}	305,7	-34,0	-133,8	-37,9



Rys. 3. Wpływ napięcia zewnętrznego U na procentowy udział poszczególnych form rozpraszania energii w blinasie energetycznym diody ($N_A=10^{18}\ cm^{-3}$, $N_D=10^{18}\ cm^{-3}$, $w_n=40\,\mu m$. $w_p=20\,\mu m$): 1 — straty rekombinacyjne — P_R, 2 — straty na styku m-p P_{Pmp}, 3 — straty na złączu p-n P_{Ppn}, 4 — straty na styku m-n P_{Pmn}

tworzących diodę na procentowy udział poszczególnych źródeł ciepła. W tym przypadku, przy stałych wymiarach warstw, zmiany drogi dyfuzji są wynikiem zmian ruchliwości i czasu życia wywołanych zmianami domieszkowania.

W celu zbadania wpływu napięcia polaryzacji U na procentowy udział poszczególnych źródeł ciepła w bilansie energetycznym diody przeprowadzono obliczenia dla diody obustronnie silnie domieszkowanej. Umożliwiło to prześledzenie zmian tych udziałów w szerokim zakresie zmian napięcia polaryzacji przy zachowaniu warunku niskiego poziomu wstrzykiwania po obu stronach złącza. Wyniki tych obliczeń są zebrane na rys. 3. Jak widać wzrost napięcia polaryzacji powoduje zmniejszenie względnej wartości wewnętrznych przepływów energii, niemniej jednak ich rola w bilansie energetycznym diody w dalszym ciągu nie jest do pominięcia.

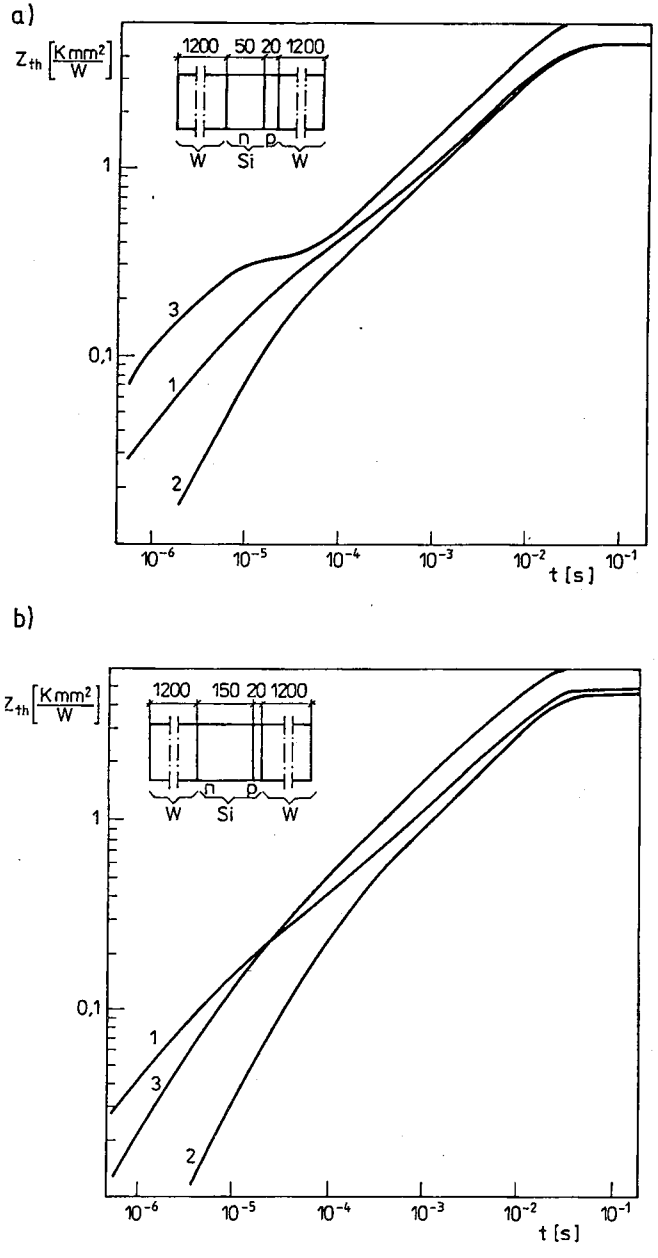
Przedstawione wyniki obliczeń wydają się wskazywać na istotny wkład efektów termoelektrycznych do bilansu energetycznego idealnej diody p-n, tak więc należałoby oczekiwać, że będą one wpływały także na jej własności cieplne. Aby to sprawdzić przeprowadzono obliczenia testowe korzystając z modelu cieplnego diody opracowanego w [16]. Polegały one na wyznaczeniu impedancji cieplnej dla dwóch z analizowanych poprzednio struktur diody przyjmując kolejno, że:
– rozpraszanie ciepła w strukturze jest opisane wzorami (1)–(4).
– moc U^*J rozprasza się równomiernie w całej pastylce półprzewodnikowej
– moc U^*J rozprasza się równomiernie na płaszczyźnie odpowiadającej złączu p-n
Wynikiem tych obliczeń są impedancje cieplne przedstawione na rys. 4a–b. Na obu rysunkach impedancja cieplna wyznaczona w oparciu o wzory (1)–(4) przyjmuje wartości znacznie większe od impedancji wyznaczonych w oparciu o modele z jednorodnymi źródłami ciepła.

2.2 STRUKTURA DIODY p-ν-n

Warunki dla których przeprowadzono obliczenia w poprzednim rozdziale zostały tak dobrane aby uwypuklić wpływ wewnętrznych przepływów energii na rozkład wydzielania ciepła w przyrządzie półprzewodnikowym. W typowych warunkach pracy rzeczywistych przyrządów półprzewodnikowych sytuacja ta może wyglądać zaupełnie odmiennie. Dlatego przeprowadzono analogiczne obliczenia dla przedstawionej na rys. 5 struktury p-ν-n, odpowiadającej rzeczywistej diodzie prostowniczej typu BYP 401.

W diodzie tej wyodrębniono dwa objętościowe źródła ciepła związane ze stratami omowymi i rekombinacją oraz cztery źródła płaskie związane z izotermicznymi efektami termoelektrycznymi na płaszczyznach kontaktów i na płaszczyznach odpowiadających złączom p-ν i n-ν. Do określenia mocy rozpraszanej w diodzie w procesach rekombinacji i w efektach termoelektrycznych wykorzystano, analogicznie jak w przypadku idealnej diody p-n, wzory (1)–(4), natomiast do wyznaczenia objętościowej gęstości strat omowych użyto wzoru (14).

$$P_J = I^2 * \rho(x, J), \tag{14}$$

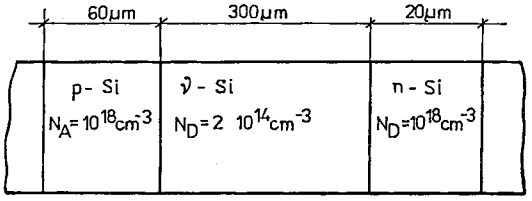


Rys. 4. Cieplna impedancja właściwa diody obliczona dla różnych modeli generacji ciepła. Ciepło rozpraszane: 1 — w płaszczyźnie złącza, 2 — w całym obszarze diody, 3 — zgodnie z wzorami (1)—(4)
(a) $N_D=10^{14}\text{cm}^{-3}$, $N_A=10^{18}\text{cm}^{-3}$, $U=0.4$ V
(b) $N_D=10^{14}\text{cm}^{-3}$, $N_A=10^{18}\text{cm}^{-3}$, $U=0.4$ V

gdzie:

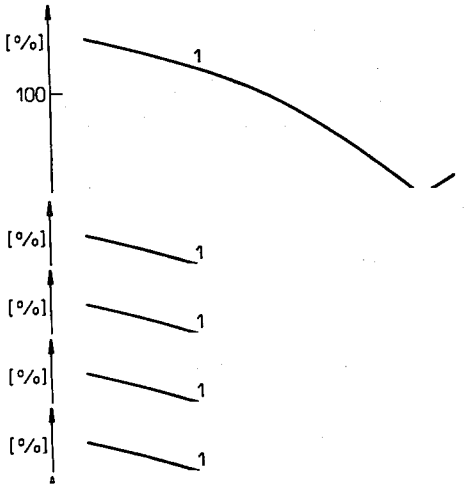
$$\rho(x) = (q(n\mu_n + p\mu_p))^{-1}. \tag{15}$$

Wyznaczenie gęstości rozpraszania mocy w przyjętych źródłach ciepła wymaga znajomości rozkładu nośników, spadku napięcia na złączach oraz gęstości prądów mniejszościowych przy kontaktach dla zadanej gęstości prądu płynącego przez diodę. W celu wyznaczenia tych wielkości opracowano elektryczny model struktury p-ν-n opisany w Dodatku I.



Rys. 5. Rozważana struktura diody BYP 401

Korzystając z tego modelu wyznaczono procentowy udział poszczególnych źródeł ciepła w rozpraszaniu mocy w diodzie BYP 401 przyjmując, że dostarczanej do przyrządu z zewnątrz mocy elektrycznej $U \times J$ odpowiada 100%. Obliczenia przeprowadzono dla pełnego zakresu gęstości prądów jakie mogą wystąpić w diodzie



Rys. 6. Zależność procentowego udziału poszczególnych źródeł ciepła w bilansie energetycznym diody p-ν-n od gęstości prądu: 1 — straty rekombinacyjne, 2 — straty omowe, 3 — straty na styku m-p, 4 — straty na styku m-n

a uzyskane wyniki są przedstawione na rys. 6[1]. Wzrost strat omowych wywołany wzrostem gęstości prądu (krzywa 2) jest tak silny, że obserwujemy na rys. 6 spadek względnych wartości mocy rozpraszanej w pozostałych procesach chociaż wartości bezwzględne tych mocy rosną wraz ze wzrostem gęstości prądu.

[1] Nie uwzględniają one krzywych odpowiadających powierzniowym źródłom ciepła związanym ze złączami p-ν i n-ν z uwagi na pomijalnie małe wartości rozpraszanego (pochłanianego) w nich ciepła. Wielkości te są znacznie mniejsze od 1 promila dla całego zakresu gęstości prądu.

Porównując otrzymane wyniki z wynikami uzyskanymi dla idealnej diody p-n można stwierdzić, że w rzeczywistej diodzie p-ν-n procentowy udział poszczególnych źródeł ciepła jest mniejszy niż w diodzie idealnej, jednak rozpraszana w nich moc pozostaje w dalszym ciągu istotnie większa od mocy $U \times J$ dostarczanej do przyrządu a bilans energetyczny jest zapewniany przez powierzchniowe źródła ciepła związane z izotermicznymi efektami termoelektrycznymi. Udział tych źródeł w bilansie maleje ze wzrostem gęstości prądu, pozostaje jednak na tyle duży, że źródła te mogą być pominięte w modelu generacji ciepła jedynie dla dużych, udarowych gęstości prądu przekraczających 1000 A/cm^2.

3. TERMOELEKTRYCZNE ZJAWISKA NIEIZOTERMICZNE

Termoelektryczne zjawiska nieizotermiczne są związane z występowaniem gradientu temperatury w strukturze półprzewodnikowej. Gradient ten może spowodować zarówno niezależny od czynników zewnętrznych przepływ termicznego prądu dyfuzyjnego, jak i pojawienie się w strukturze dodatkowych objętościowych źródeł ciepła [1]. Wpływ tych efektów na całość procesów zachodzących w przyrządzie zostanie przeanalizowany w dalszej części rozdziału.

3.1. TERMICZNE PRĄDY DYFUZYJNE

Dodatkowym efektem związanym z istnieniem gradientu temperatury w strukturze półprzewodnikowej jest wystąpienie gradientu równowagowych gęstości swobodnych nośników wywołanego nierównomierną generacją termiczną par dziura–elektron. Gradient ten wywołuje przepływ termicznych prądów dyfuzyjnych równych:

$$J_{Te} = q D_e \frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dT}} \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dx}} \tag{16}$$

$$J_{Th} = -q D_h \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dT}} \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dx}}. \tag{17}$$

Występujące we wzorach (16) i (17) pochodne gęstości nośników względem temperatury można wyznaczyć korzystając z równań

$$n + N_d = p + N_a \quad \text{oraz} \quad np = n_i^2,$$

Są one równe i określone wzorem:

$$\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dT}} = \frac{2n_i^2 \left(\frac{3}{T} + \frac{W_g}{\mathrm{kT}}\right)}{((N_d - N_a)^2 + 4n_i^2)^{0.5}} \tag{18}$$

Tak więc termiczny prąd dyfuzyjny jest równy:

$$J_T = q(D_e - D_h)\frac{dn}{dT}\frac{dT}{dx}. \tag{19}$$

W izolowanym półprzewodniku termiczny prąd dyfuzyjny prowadzi do rozdzielenia ładunku i pojawienia się lokalnych obszarów ładunku przestrzennego wywołujących przepływ prądu unoszenia kompensującego termiczny prąd dyfuzyjny. W półprzewodniku z prądem, a więc np. w realnym przyrządzie półprzewodnikowym, termiczne prądy będą wspomagać lub przeciwstawiać się przepływowi prądu zewnętrznego, co może znaleźć swoje odbicie w zmianach zaciskowych wielkości napięcia i prądu. W celu oszacowania tego wpływu przeprowadzono w oparciu o wzory (18) i (19) obliczenia testowe dla krzemu o domieszkowaniu $10^{16}cm^{-3}$. Przyjmując typowy dla przyrządów półprzewodnikowych gradient temperatury 2×10^3 K/cm, otrzymano gęstość termicznego prądu dyfuzyjnego rzędu $1.2*10^{-9}$ A/cm^2. Tak więc w normalnych warunkach pracy przyrządów półprzewodnikowych zjawisko to jest do pominięcia.

3.2. ROZPRASZANIE CIEPŁA W TERMOELEKTRYCZNYCH PROCESACH NIEIZOTERMICZNYCH

W [1] wyodrębniono objętościowe źródła ciepła związane z termoelektrycznymi efektami nieizotermicznymi, w których ciepło jest wydzielane lub pochłaniane z objętościową gęstością P_T równą:

$$P_T = \frac{3}{2}\frac{k}{q}(J_e - J_h)\frac{dT}{dx}. \tag{20}$$

W celu wstępnej oceny udziału tych źródeł w całości procesów rozpraszania i transportu ciepła w strukturach półprzewodnikowych rozważono cieplny stan ustalony w jednorodnej warstwie o grubości w. W warstwie tej temperatura zmienia się liniowo od wartości ΔT do 0, gradient temperatury jest stały i równy stosunkowi ΔT do w, a gęstość strumienia cieplnego przepływającego przez warstwę jest określona równaniem:

$$P_s = \frac{\Delta T\,\lambda}{w} \tag{21}$$

gdzie λ – przewodność cieplna półprzewodnika.
W warstwie tej jest również rozpraszane ciepło związane z nieizotermicznymi efektami termoelektrycznymi z objętościową gęstością określoną wzorem (20). W celu porównania wielkości mocy przenoszonej przez strumień cieplny przepływający przy danym ΔT przez warstwę w, z mocą rozpraszaną w tej warstwie przy tym ΔT w nieizotermicznych efektach termoelektrycznych wprowadzono procentowy współczynnik α określający stosunek tych wielkości:

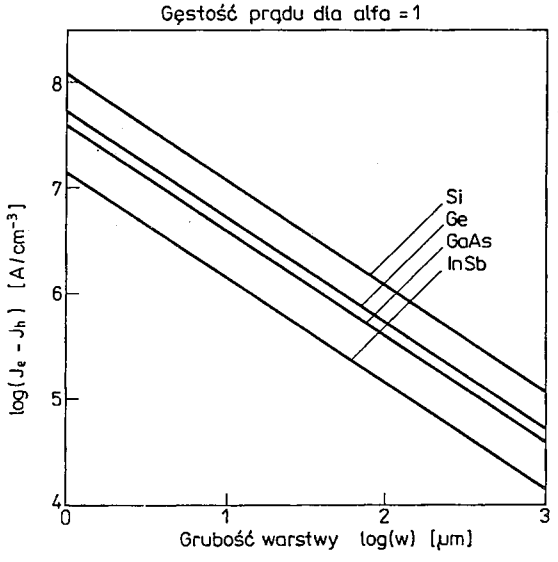
$$\alpha = \frac{P_T w}{P_s} 100\% = \frac{3}{2} \frac{k}{q\lambda} w(J_e - J_h) 100\% = C_T w(J_e - J_h). \tag{22}$$

Wartości występującej w (22) stałej C_T zostały obliczone dla podstawowych materiałów półprzewodnikowych a uzyskane wyniki są zestawione w Tabeli II. Wykorzystano je do wyznaczenia dla tych materiałów zależności $(J_e - J_h)$ w funkcji grubości warstwy w, przy założeniu, że $\alpha = 100\%$, tzn. że moc rozpraszana w warstwie w nieizotermicznych efektach termoelektrycznych jest równa strumieniowi przepływającej mocy P_s wywołującemu te efekty. Uzyskane krzywe są zebrane na rys. 7. Zgodnie z nimi, dla typowych grubości warstw półprzewodnikowych występujących w przyrządach półprzewodnikowych, tzn. dla grubości zawartych w przedziale 50 – 300 μm, uzyskanie $\alpha = 100\%$ wymaga gęstości prądu zawierających się w granicach od 2300 – 395 kA/cm² dla Si do 290 – 47 kA/cm² dla InSb. Gęstości takie nie występują w realnych przyrządach a rzeczywiste wartości α są oczywiście dużo mniejsze.

T a b e l a II

Wartości stałej C_T w podstawowych materiałach półprzewodnikowych

Materiał	C_T [cm/A]
Si	$8{,}415\ 10^{-3}$
GaAs	$2{,}487\ 10^{-2}$
InSb	$6{,}961\ 10^{-2}$
InP	$2{,}926\ 10^{-2}$



Rys. 7. Zależność gęstości wypadkowego prądu nośników od grubości warstwy półprzewodnikowej dla $\alpha = 100\%$